

# OPTIMIZACIÓN PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Jorge Amaya

Departamento de Ingeniería Matemática  
Centro de Modelamiento Matemático  
Universidad de Chile

10 de agosto de 2022

El presente texto contiene la mayor parte de los contenidos del curso de optimización que he dictado en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile durante los últimos años.

Inicialmente, tanto los énfasis como las motivaciones del curso estaban en los fundamentos matemáticos de la optimización y en el rigor de su desarrollo. Con el tiempo, el curso fue interesando también a estudiantes de variadas especialidades, lo cual ha significado que un gran número de estudiantes necesitan conocer la teoría y práctica de la Optimización, así como sus aplicaciones a todas las ramas de la ingeniería. En esta evolución hemos debido adaptar sus contenidos para hacerlos más cercano a los intereses de estudiantes de especialidades tales como electricidad, minería, mecánica o biotecnología. Es así como los conceptos matemáticos de base para el estudio de la optimización no están agrupados en un primer capítulo introductorio, sino que son expuestos directamente en los capítulos donde son usados. Al inicio se expone la definición y propiedades generales de los conjuntos convexos, dando énfasis al estudio de los poliedros, que son de uso intensivo en la teoría de la programación lineal. Igualmente, se ha incorporado un capítulo sobre los problemas de flujos en redes, particularmente los problemas de flujo de costo mínimo, flujo máximo, asignación, transporte y camino más corto, de mucho interés para la formación de ingenieros.

Antes de introducir la teoría básica de condiciones de optimalidad, se define la noción de función convexa y sus propiedades esenciales, todo en el caso diferenciable. Cada día es más frecuente encontrar, en la práctica profesional y en la investigación, problemas reales de optimización con componentes no lineales. La programación no lineal casi siempre se enseña de manera somera en las escuelas de ingeniería, tanto por la supuesta complejidad de su tratamiento matemático y los conceptos que usa, como por la relativa dificultad de implementación de los algoritmos. Por una parte, la linearización de algunos componentes puede permitir su solución mediante el uso reiterado de la programación lineal y, por otra, la resolución directa por métodos de programación no lineal es a menudo muy costosa.

No se trata esta de una obra completamente original, sino más bien corresponde a un compendio de materias ampliamente conocidas que hemos sistematizado para dar cuerpo a un texto de estudio a nivel universitario. Al final, hemos incluido una larga lista de problemas propuestos, los cuales permiten practicar los conceptos y materias tratadas en los capítulos anteriores. Algunos son clásicos y conocidos, herencia de varios años de experiencia, otros son producto de nuestra propia invención.

Este trabajo se ha enriquecido con la colaboración de mis profesores auxiliares y ayudantes, así como por la constante interpelación de los estudiantes. A todos ellos les agradezco su contribución, con la que me alimentan clase a clase.

**Jorge Amaya**

# Índice general

<b>1. Introducción y convexidad de conjuntos</b>	<b>6</b>
1.1. El problema de optimización . . . . .	6
1.2. Conjuntos convexos . . . . .	7
1.2.1. Combinaciones convexas . . . . .	11
1.2.2. Caso especial: conos convexos . . . . .	13
1.3. Poliedros: caracterización y propiedades . . . . .	15
1.3.1. Puntos extremos . . . . .	17
1.3.2. Direcciones y direcciones extremas . . . . .	24
<b>2. Programación lineal</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción y ejemplos . . . . .	29
2.2. Resolución de problemas de programación lineal: algoritmo Simplex . . . . .	31
2.2.1. Fase II del algoritmo Simplex: mejorar solución en curso . . . . .	34
2.2.2. Fase I del algoritmo Simplex: obtener una solución inicial básica factible	41
2.3. Introducción a la programación lineal entera . . . . .	45
2.3.1. Método de ramificación y acotamiento . . . . .	45
2.3.2. Algunas técnicas de modelamiento con variables enteras . . . . .	50
<b>3. Dualidad en programación lineal y aplicaciones</b>	<b>53</b>
3.1. Definición de dualidad y principales propiedades . . . . .	55
3.2. Interpretación económica de la dualidad . . . . .	61

3.3.	Dual de cualquier problema lineal . . . . .	62
3.4.	Algoritmo Simplex-dual . . . . .	63
3.5.	Introducción al análisis post-optimal . . . . .	65
3.5.1.	Variación en los coeficientes de la función objetivo . . . . .	65
3.5.2.	Variación en el vector de recursos (o lado derecho) . . . . .	68
3.5.3.	Introducción de una nueva actividad (o variable) . . . . .	69
3.5.4.	Introducción de una nueva restricción . . . . .	71
<b>4.</b>	<b>Modelos para flujos en redes</b>	<b>75</b>
4.1.	Motivación y descripción de problemas clásicos . . . . .	75
4.1.1.	Problema de asignación . . . . .	78
4.1.2.	Problema de transporte . . . . .	79
4.1.3.	Problema de flujo máximo . . . . .	81
4.1.4.	Problema de camino más corto . . . . .	82
4.2.	Resolución del problema de transporte . . . . .	84
4.2.1.	Obtener una solución básica factible inicial (Fase I) . . . . .	84
4.2.2.	Examinar si una solución básica factible es óptima . . . . .	88
4.2.3.	Modificar una solución básica factible (si no es óptima) . . . . .	90
4.3.	Flujo de costo mínimo: mejoramiento de una solución en curso . . . . .	92
<b>5.</b>	<b>Caracterización de optimalidad</b>	<b>97</b>
5.1.	El problema de optimización no lineal . . . . .	97
5.2.	Funciones convexas . . . . .	98
5.2.1.	Conjuntos relevantes asociados a funciones convexas . . . . .	102
5.2.2.	Funciones convexas diferenciables . . . . .	104
5.2.3.	Funciones convexas subdiferenciables . . . . .	110
5.2.4.	Proyección sobre conjuntos convexos . . . . .	114
5.2.5.	Separación de convexos: teoremas de Farkas y Gordan . . . . .	117
5.3.	Condiciones de optimalidad: caso sin restricciones . . . . .	123

5.3.1.	Condiciones necesarias de optimalidad . . . . .	123
5.3.2.	Condiciones suficientes . . . . .	125
5.4.	Condiciones de optimalidad: caso con restricciones . . . . .	125
5.4.1.	Calificación de restricciones . . . . .	136
<b>6.</b>	<b>Dualidad en optimización no Lineal</b>	<b>143</b>
6.1.	Función Lagrangeana . . . . .	143
6.2.	Problema dual Lagrangeano . . . . .	144
6.3.	Teoremas de dualidad . . . . .	145
6.3.1.	Dualidad débil . . . . .	145
6.3.2.	Dualidad fuerte . . . . .	146
6.4.	Puntos silla . . . . .	152
6.4.1.	Definición y existencia . . . . .	152
6.4.2.	Relación con la optimalidad . . . . .	154
<b>7.</b>	<b>Algoritmos para programación no lineal</b>	<b>157</b>
7.1.	Introducción . . . . .	157
7.2.	Optimización sin restricciones . . . . .	159
7.2.1.	Método del gradiente . . . . .	159
7.2.2.	Caso cuadrático . . . . .	161
7.2.3.	Método de Newton . . . . .	164
7.3.	La trayectoria del gradiente . . . . .	167
7.4.	Métodos de paso (o minimización unidimensional) . . . . .	171
7.4.1.	Método de dicotomía . . . . .	172
7.4.2.	Paso de Armijo . . . . .	174
7.5.	Optimización con restricciones . . . . .	175
7.5.1.	Método del gradiente proyectado . . . . .	176
7.5.2.	Método de direcciones admisibles . . . . .	184
7.5.3.	Método de penalización . . . . .	189

7.5.4. Método de barrera (o penalización interior) . . . . .	195
<b>8. Casos especiales de optimización no lineal</b>	<b>201</b>
8.1. Caso de la programación cuadrática . . . . .	201
8.1.1. Condiciones de KKT para el caso cuadrático . . . . .	202
8.1.2. Algoritmo de Lemke para el problema complementario . . . . .	203
8.2. Problema lineal fraccional . . . . .	209
8.2.1. Equivalencia con un problema lineal . . . . .	209
8.3. Problemas de regresión . . . . .	211
8.3.1. Mínimos cuadrados (norma $l_2$ ) . . . . .	211
8.3.2. Mínima dispersión según norma $l_1$ . . . . .	212
8.3.3. Mínima dispersión según norma $l_\infty$ . . . . .	213
<b>9. Problemas propuestos</b>	<b>214</b>
9.1. Formulación y modelamiento de problemas . . . . .	214
9.2. Matemáticas para la optimización: convexidad . . . . .	219
9.3. Programación lineal . . . . .	225
9.4. Dualidad en programación lineal y aplicaciones . . . . .	229
9.5. Modelos para flujos en redes . . . . .	239
9.6. Caracterización de optimalidad . . . . .	243
9.7. Algoritmos para optimización no lineal . . . . .	252

# Capítulo 1

## Introducción y convexidad de conjuntos

### 1.1. El problema de optimización

La formulación matemática de un problema de optimización se escribe habitualmente en la forma:

$$(P) \underset{x \in S}{\text{minimizar}} \quad (\text{o maximizar}) \quad f(x)$$

donde  $x$  es el **vector de variables de decisión**,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es la **función objetivo** y  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  es el **conjunto factible**. De aquí en adelante trabajaremos solamente con la formulación en términos problema de minimización, sabiendo que el otro caso es completamente análogo.

A menudo el conjunto factible está descrito mediante

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

y se dice que las expresiones  $g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$  representan el **conjunto de restricciones** del problema  $(P)$ . El subconjunto  $X$  puede representar, por ejemplo, el primer cuadrante de  $\mathbb{R}^n$ , las variables enteras, o las variables binarias. Si  $S = \mathbb{R}^n$ , el problema se dirá **irrestringido**.

Un vector  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  que pertenezca al conjunto  $S$  se llamará **solución (o punto) factible** de  $(P)$ . Si además satisface que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in S,$$

se dirá que  $\bar{x}$  es **solución óptima** o simplemente **solución de  $(P)$** .

Dependiendo de las características particulares del problema, éste recibe nombres y tratamientos especiales para su resolución. Dos casos de interés, son el de la **programación lineal** ( $f$  y  $g_i$  son funciones lineales afines  $\forall i$ ) y la **programación lineal entera** (en que además las variables sólo toman valores enteros). También trataremos la teoría y técnicas de solución de un problema con funciones no lineales.

Un concepto esencial para entender cómo plantear y resolver un problema de optimización es el de **convexidad**. Mostrar algo de la teoría básica del análisis convexo y su vinculación con la teoría de optimización son los objetivos de las secciones 1.2 y 5.2.

## 1.2. Conjuntos convexos

**Definición 1.2.1** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $S$  es **convexo** si

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \quad \forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Geométricamente, esta definición se puede interpretar como sigue: un conjunto no vacío es convexo si dados dos puntos del conjunto, el segmento de recta que los une está contenido en dicho conjunto (ver Figura 1.1). Por convención, el conjunto vacío será considerado convexo.

**Ejemplo 1.2.1** Un espacio vectorial es un conjunto convexo (en particular,  $\mathbb{R}^n$  lo es).

*Es evidente puesto que, por definición, un espacio vectorial es cerrado para la suma y la ponderación por escalar.*

**Ejemplo 1.2.2**  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$  es un conjunto convexo.

*En efecto, sean  $x, y \in S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Por definición del conjunto  $S$ , esto significa que  $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$  e  $y_1 + 2y_2 - y_3 = 2$ .*



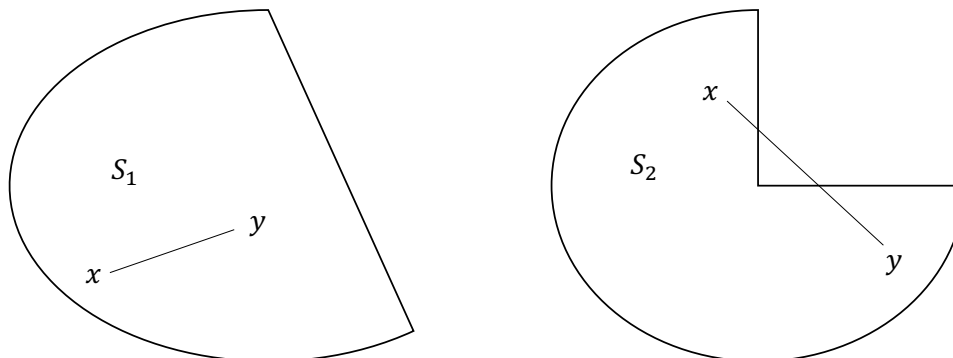


Figura 1.1: El conjunto  $S_1$  es convexo y el conjunto  $S_2$  no es convexo.

Vemos que  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \\ \lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3 \end{bmatrix}$  pertenece a  $S$ , pues

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + 2\{\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2\} - \{\lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3\} &= \\ \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + (1 - \lambda)(y_1 + 2y_2 - y_3) &= \\ 2\lambda + 2(1 - \lambda) &= 2 \end{aligned}$$

**Definición 1.2.2** Sean  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijos. Se llama **hiperplano** al conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$$

Un hiperplano  $H$  define dos **semiespacios**:

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq \alpha\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \geq \alpha\}$$

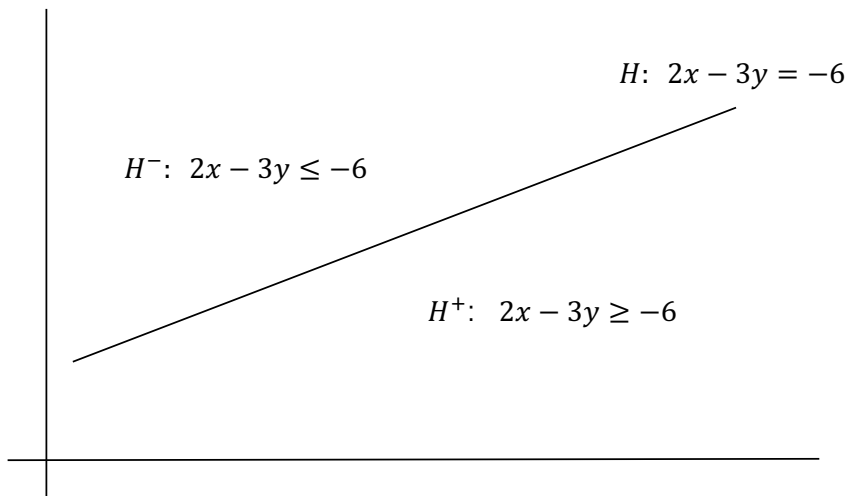


Figura 1.2: Semiespacios generados por el hiperplano  $H$

Por ejemplo, en el caso  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$  se tiene que  $a^T = (1, 2, -1)$  y  $\alpha = 2$ . Los dos semiespacios asociados son:

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2\}.$$

**Ejemplo 1.2.3** *Un semiespacio  $S$  en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo.*

*Consideremos  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que definen el semiespacio*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq \alpha\}.$$

*Sean  $x, y \in S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces*

$$a^T \{\lambda x + (1 - \lambda)y\} = \lambda a^T x + (1 - \lambda)a^T y \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$$

*Luego  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$  y, por lo tanto,  $S$  es convexo.*

**Proposición 1.2.1** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos convexos. Entonces  $S_1 \cap S_2$  es un conjunto convexo.

**Demostración.** Sean  $x, y \in S_1 \cap S_2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces

$$x, y \in S_1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1$$

y

$$x, y \in S_2 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S_2,$$

puesto que  $S_1$  y  $S_2$  son convexos.

Luego  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_1 \cap S_2$ , es decir,  $S_1 \cap S_2$  es convexo. ■

**Proposición 1.2.2** El conjunto  $co(S)$  es el convexo más pequeño (en el sentido de la inclusión) que contiene a  $S$ , es decir,  $co(S) = \cap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$ .

**Demostración.** Sea  $x \in \cap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$ . Entonces  $x \in C, \forall C$  convexo, tal que  $S \subseteq C$ . Luego  $x \in co(S)$ , que es un convexo particular que contiene a  $S$ .

Sean ahora  $x \in co(S)$  y  $C$  un convexo cualquiera que contiene a  $S$ . Entonces  $co(S) \subseteq co(C) = C$ , por lo tanto  $x \in C$ . Luego,  $x \in \cap \{C \subseteq \mathbb{R}^n / C \text{ convexo}, S \subseteq C\}$ . ■

**Proposición 1.2.3** Sean  $S_1$  y  $S_2$  convexos,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se define la suma y ponderación de conjuntos como sigue:

- $S_1 + S_2 = \{x + y / x \in S_1, y \in S_2\}$
- $\alpha S_1 = \{\alpha x / x \in S_1\}$

Pruebe que  $S_1 + S_2$  y  $\alpha S_1$  son convexos.

**Observación 1.2.1** Observemos que:

- i) Esta propiedad se puede generalizar fácilmente a una intersección cualquiera de convexos. Esto es, si  $\Gamma$  es un conjunto arbitrario (incluso no numerable) y  $\{S_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  es una clase de conjuntos convexos, entonces  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$  es un conjunto convexo.

ii) Aunque del Ejemplo 1.2.3 puede concluirse fácilmente que un hiperplano es un conjunto convexo (reemplazando las desigualdades por igualdades), podemos usar esta proposición para probar que un hiperplano es un conjunto convexo, dado que es intersección de convexos.

**Ejemplo 1.2.4** Sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

con  $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

El sistema se anota de manera compacta  $Ax \leq b$ , con  $A = (a_{ij})_{i=1\dots m; j=1\dots n}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ .

El conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$  es la intersección de  $m$  semiespacios de la forma

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n / A_i x \leq b_i\}$$

(donde  $A_i$  denota la fila  $i$ -ésima de la matriz  $A$ ), los cuales, según vimos en el Ejemplo 1.2.3, son conjuntos convexos. Luego, por la Proposición 1.2.1,  $S$  es convexo.

Más adelante, a los conjuntos de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$  los llamaremos **poliedros**.

### 1.2.1. Combinaciones convexas

**Definición 1.2.3** Sean  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$  tales que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . El vector  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  se dice **combinación convexa** de los  $k$  vectores  $x_1, \dots, x_k$ .

**Observación 1.2.2** Se deja como ejercicio probar que es equivalente definir convexidad de un conjunto de la manera siguiente: un conjunto  $S \in \mathbb{R}^n$  es convexo si, para cualquier conjunto de puntos  $x_1, \dots, x_k \in S$  y escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$  tales que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , se tiene que el punto

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$$

pertenece a  $S$ . Es decir, **cualquier combinación convexa de puntos del conjunto  $S$  está en  $S$ .**

**Definición 1.2.4** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  (no necesariamente convexo). Se define la **envoltura convexa** de  $S$ , de la manera siguiente:

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Es decir, es el conjunto de todas las posibles combinaciones convexas de puntos de  $S$ .

**Proposición 1.2.4** Sean  $S, S' \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces:

- $S \subseteq co(S)$ .
- $S$  es convexo si y sólo si  $co(S) = S$ .
- Si  $S \subseteq S'$  entonces  $co(S) \subseteq co(S')$ .

**Ejemplo 1.2.5** La envoltura convexa de los números racionales es  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.2.6** Sean  $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Su envoltura convexa queda determinada por el poliedro de la Figura 1.4, cuyos vértices están dados por el conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

**Proposición 1.2.5**  $co(S)$  es un conjunto convexo.

**Demostración.** Sean  $x, y \in co(S)$ , es decir,

$$x = \sum_{i=1}^k \nu_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$$

donde  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m \in S$  y  $\nu_1, \dots, \nu_k, \mu_1, \dots, \mu_m$ , son ponderadores de las combinaciones convexas.

Sea  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^k \nu_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$ .

Llamando  $z_i = x_i$ ,  $\alpha_i = \lambda \nu_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y  $z_{k+i} = y_i$ ,  $\alpha_{k+i} = (1 - \lambda) \mu_i$   $\forall i = 1, \dots, m$ , se tiene que  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i z_i$  con

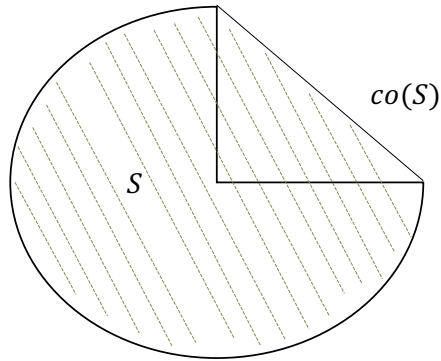


Figura 1.3: Envoltura convexa del conjunto  $S$ .

$$z_i \in S, \alpha_i \in [0, 1], \quad \forall i = 1, \dots, k+m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^k \nu_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i = 1,$$

lo cual dice que  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+m}$  son coeficientes de una combinación convexa, por lo tanto  $\lambda x + (1-\lambda)y \in \text{co}(S)$ , lo que prueba que  $\text{co}(S)$  es convexo. ■

### 1.2.2. Caso especial: conos convexos

**Definición 1.2.5** Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío. Se dice que  $C$  es un **cono** si

$$z \in C \implies \lambda z \in C, \quad \forall \lambda \geq 0$$

Es evidente que todo cono contiene al origen y que pueden existir conos convexos o no convexos, cerrados o no cerrados (busque ejemplos simples en  $\mathbb{R}^2$ ).

**Definición 1.2.6** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío. El **cono polar** de  $S$  está definido por

$$S^* = \{p / p^T x \leq 0, \forall x \in S\}$$

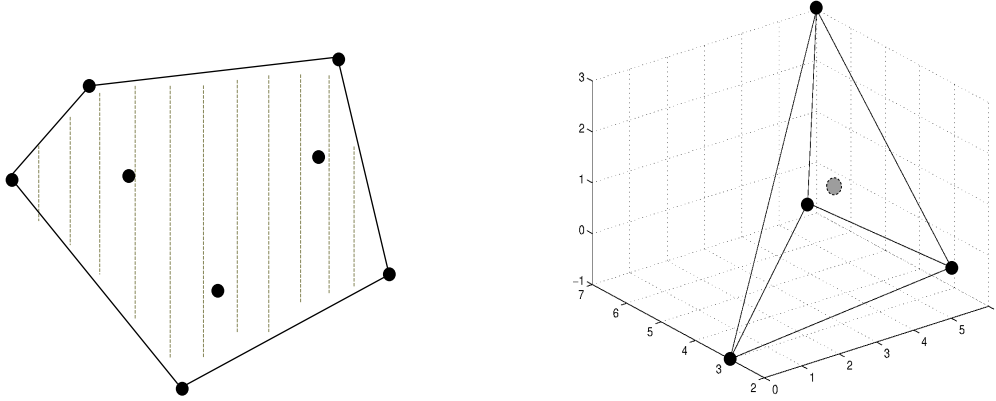


Figura 1.4: Envoltura convexa de conjuntos finitos (8 y 4 puntos, respectivamente). Los vértices están dados por un subconjunto del conjunto de puntos.

Probar como ejercicio el siguiente lema.

**Lema 1.2.1** *Para todo  $S, R \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacíos.*

- $S^*$  es un cono, convexo y cerrado.
- $S \subseteq S^{**}$ , donde  $S^{**} = (S^*)^*$ .
- $S \subseteq R \implies R^* \subseteq S^*$ .

**Teorema 1.2.1** *Si  $C$  es un cono, convexo, cerrado y no vacío, entonces  $C^{**} = C$ .*

**Demostración.** Basta probar que  $C^{**} \subseteq C$ . Sea entonces  $x \in C^{**}$  y supongamos que  $x \notin C$ . Como  $C$  es convexo existen (teorema de separación)  $p \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned}
 p^T x &> \alpha \\
 p^T y &\leq \alpha, \quad \forall y \in C \quad (a)
 \end{aligned}$$

Pero  $0 \in C$ , luego  $\alpha \geq 0$ , es decir,

$$p^T x > 0 \quad (b)$$

Veremos que  $p \in C^*$ . Si no, existe  $\bar{y} \in C$  tal que  $p^T \bar{y} > 0$ , lo que implica que

$$p^T(\lambda \bar{y}) > 0, \quad \forall \lambda \geq 0$$

lo que contradice (a), puesto que  $\lambda \bar{y} \in C$ , para  $\lambda \geq 0$  arbitrario. Luego  $p \in C^*$ .

Como  $x \in C^{**}$ , entonces  $p^T x \leq 0$ , lo que contradice (b). Así, se deduce que  $x \in C$  y por lo tanto  $C^{**} \subseteq C$ .

### 1.3. Poliedros: caracterización y propiedades

**Definición 1.3.1** Se llama **poliedro** a un conjunto de la forma  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$  con  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ , es decir, un poliedro es una intersección finita de semiespacios.

**Proposición 1.3.1**  $\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  es un poliedro<sup>1</sup>.

**Demostración.** Claramente, el conjunto  $\mathcal{P}'$  queda representado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales :

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $I$  la matriz identidad en dimensión  $n$ .

Llamando  $A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$ ,  $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$ , se obtiene un sistema de la forma

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / A'x \leq b'\},$$

que es igual a  $\mathcal{P}'$ . Luego,  $\mathcal{P}'$  es un poliedro. ■

---

<sup>1</sup>Notación: se dice que  $x \geq 0$  si y solamente si  $x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$



**Observación 1.3.1** Es obvio que  $\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq b\}$  es un poliedro. En efecto: como  $x \in \mathbb{R}^n$  es irrestricto, basta multiplicar el sistema de desigualdades por  $-1$ , y definir  $A' = -A$ ,  $b' = -b$ .

**Proposición 1.3.2** Todo poliedro es un conjunto convexo.

**Demostración.** Ver Ejemplo 1.2.4. ■

Se dirá que un poliedro de la forma  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  está escrito en *canónica o standard*. En lo sucesivo trabajaremos con esta representación.

**Proposición 1.3.3** Un poliedro es un conjunto cerrado.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{P}$  el poliedro  $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  y consideremos  $\bar{x} \in \bar{\mathcal{P}}$  (adherencia o cerradura de  $\mathcal{P}$ ). Mostraremos que  $\bar{x} \in \mathcal{P}$ .

Como  $\bar{x} \in \bar{\mathcal{P}}$ , existe una sucesión  $\{x_k\}$  en  $\mathcal{P}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ .

Además,  $\forall k \geq 0$ , el punto  $x_k$  satisface

$$\begin{aligned} Ax_k &= b \\ x_k &\geq 0 \end{aligned}$$

Tomando límite (y por continuidad de la función lineal  $x \mapsto Ax$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego  $\bar{x} \in \mathcal{P}$  y por lo tanto  $\bar{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ . Dado que se cumple siempre que  $\mathcal{P} \subseteq \bar{\mathcal{P}}$ , se obtiene  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ , luego  $\mathcal{P}$  es cerrado. ■

**Ejemplo 1.3.1**  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 / -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \geq 4, x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ .

Matricialmente esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto  $C$ , tal como se aprecia en la Figura 1.5, es un poliedro no acotado (por cierto, es convexo y cerrado).

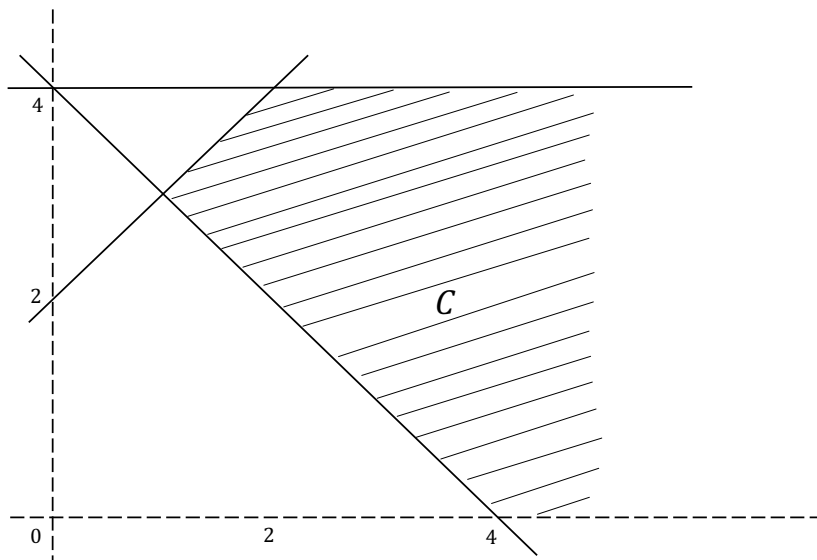


Figura 1.5: El conjunto  $C$  es un poliedro no acotado.

### 1.3.1. Puntos extremos

**Definición 1.3.2** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $S \neq \emptyset$ . Un vector  $x \in S$  se llama **punto extremo de S** si no puede ser representado como combinación convexa de otros dos puntos distintos del convexo. Es decir, si  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ , con  $x_1, x_2 \in S$  y  $\lambda \in ]0, 1[$ , entonces  $x = x_1 = x_2$ .

**Ejemplo 1.3.2** Veamos algunos casos de conjuntos convexos y sus puntos extremos.

- Sea  $S=B(0,1)$ , la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto de puntos extremos queda representado por  $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ , que es la frontera de  $S$ .
- El conjunto de puntos extremos del poliedro del Ejemplo 1.2.6 es

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- El conjunto de puntos extremos de un semiespacio cerrado es vacío.

d) Sean  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  y  $S = \text{co}\{U\}$

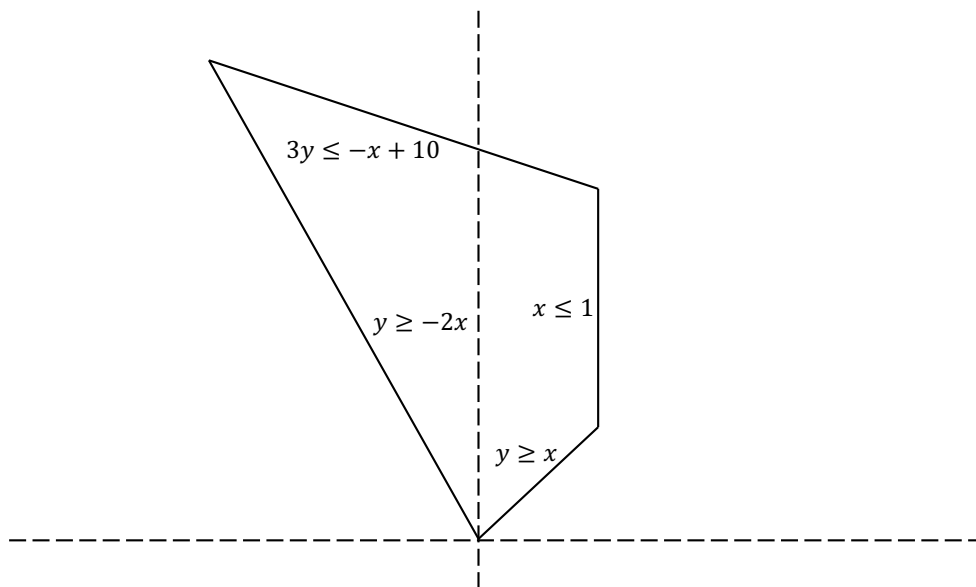


Figura 1.6:  $S$  es la envoltura convexa del conjunto  $U$

Naturalmente, el conjunto de puntos extremos de  $S$  es  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ .

El sistema que representa a  $S$  es

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

En general, fácilmente se puede ver que  $x$  es punto extremo de un convexo  $S$  si y solamente si  $S \setminus \{x\}$  es un conjunto convexo, de donde se sigue que si  $S^*$  es tal que  $\text{co}(S^*) = S$ , entonces necesariamente  $S^*$  debe incluir al conjunto de puntos extremos de  $S$ .

La noción de punto extremo es de suma importancia en la teoría de optimización pues, como veremos más adelante, está en relación directa con el conjunto de soluciones para un problema de programación lineal, por lo cual es importante tener una caracterización simple. Veamos el siguiente ejemplo de motivación (gráfico se muestra en la Figura 1.7):

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 \leq 2, \quad 8x_1 + 3x_2 \leq 8, \quad x_1, x_2 \geq 0\}$$

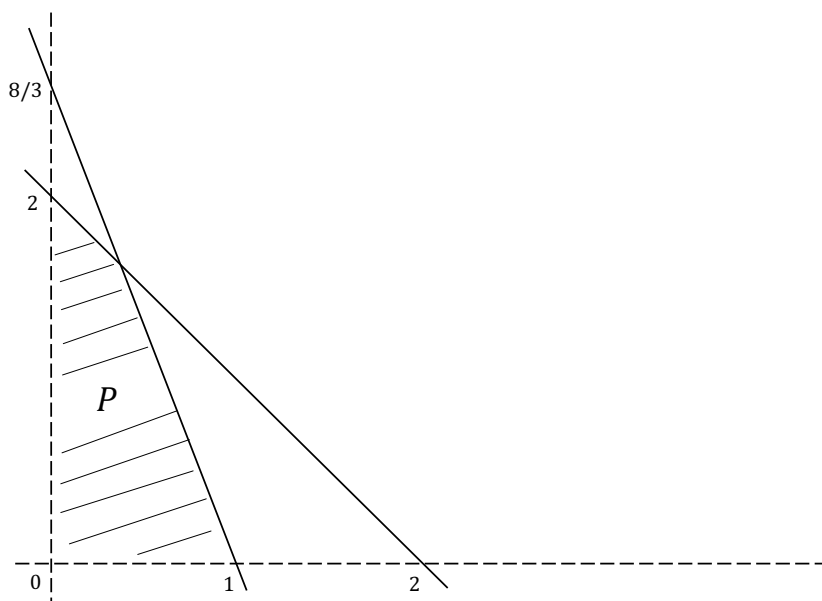


Figura 1.7: Ejemplo de motivación.

Los puntos extremos son  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Trabajaremos con el poliedro (en  $\mathbb{R}^4$ )

$$\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad 8x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$$

que es equivalente a  $\mathcal{P}$  en el sentido siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \exists x_3, x_4 \geq 0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}'.$$

Examinemos entonces el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\8x_1 + 3x_2 + x_4 &= 8 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Asignando valor nulo a dos variables cualesquiera podemos entonces resolver el sistema de dos ecuaciones cada vez, lo que genera las soluciones

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa que dos de ellas (la tercera y la cuarta) no satisfacen la condición de positividad, luego no pertenecen a  $\mathcal{P}'$ . Sin embargo las cuatro soluciones restantes determinan, en sus dos primeras coordenadas, los puntos extremos de  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}.$$

Esto se expresa en forma general en el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.1** *Sea un poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es de rango  $m$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Un punto  $x$  es extremo de  $\mathcal{P}$  si y sólo si la matriz  $A$  se puede descomponer, eventualmente reordenando sus columnas, en la forma  $A = [B, N]$ , donde  $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  es invertible,  $N \in \mathcal{M}_{m \times (n-m)}(\mathbb{R})$  corresponde a las columnas restantes y  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $B^{-1}b \geq 0$ .*

**Demostración.**

( $\Leftarrow$ ) Sea  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$ . Se tiene que  $x \in \mathcal{P}$ , pues

$$Ax = [B, N] \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = BB^{-1}b + N0 = b.$$

Sean  $u, v \in \mathcal{P}$  tales que  $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ , para algún  $\lambda \in ]0, 1[$ , es decir

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

De allí:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1 = B^{-1}b \\ (2) \quad & \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2 = 0 \end{aligned}$$

Como  $u, v \in \mathcal{P}$ , necesariamente  $u \geq 0, v \geq 0$ . Luego de (2) se tiene que  $u_2 = v_2 = 0$ .

Como  $u \in \mathcal{P}$  satisface  $Au = b$ , esto es  $[B, N] \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Bu_1 = b$  entonces  $u_1 = B^{-1}b$ , por lo tanto,  $u = x$ .

De la misma manera se prueba que  $v = x$ , con lo que se concluye que  $x$  es punto extremo.

( $\implies$ ) Supongamos ahora que  $x \in \mathcal{P}$  es un punto extremo. Eventualmente reordenando las columnas del sistema,  $x$  puede escribirse

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

con  $x_i > 0$  para  $i = 1, \dots, k$ .

Notemos  $A = [A_1, \dots, A_n]$ , donde  $A_i, i = 1, \dots, n$ , es la  $i$ -ésima columna de  $A$ . Luego, como  $Ax = b$ , se tiene que  $\sum_{i=1}^k x_i A_i = b$ .

Probaremos que las columnas  $A_1, \dots, A_k$  son linealmente independientes. Supongamos que son linealmente dependientes, es decir, que existen  $\mu_1, \dots, \mu_k$  no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^k \mu_i A_i = 0$$

Definamos el vector  $\mu^T = (\mu_1, \dots, \mu_k, 0, \dots, 0)$  que obviamente satisface  $A\mu = 0$ . Construimos los siguientes vectores

$$\begin{aligned} y &= x + \alpha\mu \\ z &= x - \alpha\mu \end{aligned}$$

Es claro entonces que  $Ay = b$  y  $Az = b$  y también que  $y, z \geq 0$ , para  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño. Por lo tanto se tiene que  $y, z \in \mathcal{P}$ .

Además  $x \neq y$ ,  $y \neq z$  y  $z \neq x$ , por lo tanto  $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$  es combinación convexa de dos puntos distintos en  $\mathcal{P}$ , luego no es extremo (contradicción).

Así,  $A_1, \dots, A_k$  son linealmente independientes, lo que implica, en particular, que  $k \leq m$ . Podemos agregar  $A_{k+1}, \dots, A_m$  (eventualmente reordenando columnas) para obtener un conjunto maximal (recordar que  $A$  es de rango  $m$ ) y definir  $B = [A_1, \dots, A_m]$ , que es una matriz invertible, y  $N = [A_{m+1}, \dots, A_n]$ .

Con esto,  $A$  se puede escribir en la forma  $A = [B, N]$ , a menos de una reordenación de las columnas. Se tiene entonces las equivalencias

$$Ax = b \iff \sum_{i=1}^n x_i A_i = b \iff \sum_{i=1}^m x_i A_i + \sum_{i=m+1}^n x_i A_i = b$$

Notando  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ , con

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

la ecuación anterior se escribe:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

de donde  $x_B = B^{-1}b$ . ■

**Observación 1.3.2** *A un punto extremo de un poliedro se le denomina también **vértice** y a una matriz  $B$  que permite representar ese punto extremo, se le denomina **base factible** del poliedro.*

**Corolario 1.3.1** *El número de puntos extremos de un poliedro en la forma canónica es finito.*

**Demostración.** Hay a lo sumo  $\binom{n}{m}$  formas de elegir las  $m$  columnas independientes de  $A$ , y cada matriz  $B$  está asociada a lo más a un punto extremo. ■

**Ejemplo 1.3.3** Consideremos un poliedro en la forma canónica dado por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos sus puntos extremos. De acuerdo al corolario anterior, existen a lo sumo 6 puntos extremos dado que hay 6 formas posibles de elegir la matriz  $B$ .

(1)  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  no es invertible.

(2)  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  es invertible, pero  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$  no es un vector positivo.

(3)  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  es invertible y el vector  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  tiene todas sus coordenadas positivas.

(4)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  es invertible, pero  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  no es un vector positivo.

(5)  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  es invertible y el vector  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  tiene todas sus coordenadas positivas.

(6)  $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  es invertible, pero  $B^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  no es un vector positivo.

Los casos (3) y (5) nos entregan puntos extremos para el poliedro en estudio, sólo falta ubicar los valores resultantes en las posiciones correctas:

- La matriz del caso (3) toma las columnas primera y cuarta de la matriz  $A$ , luego el vector punto extremo correspondiente será  $\begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ .
- La matriz del caso (5) toma las columnas segunda y cuarta de la matriz  $A$ , luego el vector punto extremo correspondiente será  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ .



**Definición 1.3.3** Se llama **polígono** a la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos.

De acuerdo con esta definición, puede concluirse fácilmente que todo polígono es envoltura convexa de sus puntos extremos. Es obvio, además, que todo polígono es un poliedro. Luego, parece natural preguntarse si todo poliedro puede escribirse como combinación convexa de sus puntos extremos. La respuesta es negativa, cuando el poliedro es no acotado. En el Ejemplo 1.3.1 observamos que los puntos del poliedro que no están en la superficie del triángulo definido por los puntos  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , no pueden ser expresados como combinación convexa de esos tres puntos extremos.

**Ejemplo 1.3.4** Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq |x_1|\}$ . Dado que

$$x_2 \geq |x_1| \iff x_2 \geq x_1 \geq -x_2$$

se tiene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 \leq 0\}$$

En forma matricial, se escribe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x \leq 0.$$

Como es posible ver en la Figura 1.8, el origen es el único punto extremo y ningún punto del poliedro  $S$  puede expresarse como combinación convexa de sus puntos extremos. Luego, para poliedros no acotados introduciremos un nuevo concepto, en la subsección siguiente.

### 1.3.2. Direcciones y direcciones extremas

**Definición 1.3.4** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , un conjunto convexo. Un vector  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , se dice **dirección** de  $S$  si  $\forall x \in S$  se tiene que  $x + \lambda d \in S$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ .

Consideremos el poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ . Una dirección de  $\mathcal{P}$  debe satisfacer que  $\forall x \in \mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} A(x + \lambda d) &= b \quad \forall \lambda \geq 0 \\ x + \lambda d &\geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Luego,  $d$  es dirección de  $\mathcal{P}$  si y solamente si satisface el sistema  $Ad = 0$ ,  $d \geq 0$ .

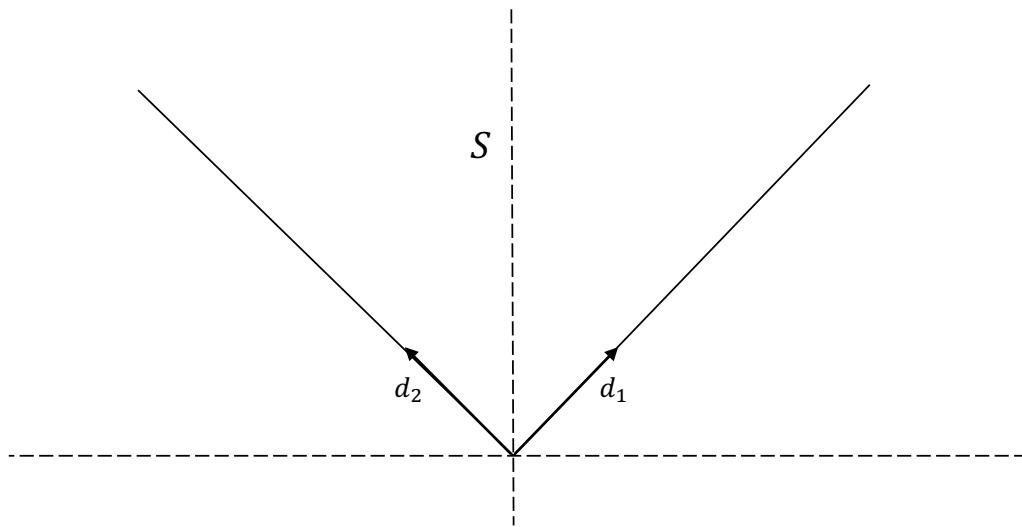


Figura 1.8: El origen es el único punto extremo del poliedro  $S$  de la figura y  $d_1$ ,  $d_2$  son sus únicas direcciones extremas.

**Definición 1.3.5** *Dos direcciones  $d_1$  y  $d_2$  se dirán iguales si  $d_1 = \alpha d_2$  para algún  $\alpha > 0$ . Se escribirá  $d_1 = d_2$ , si no hay posible confusión.*

**Definición 1.3.6** *Sea  $S$  un convexo cerrado y  $d \in \mathbb{R}^n$  una dirección de  $S$ . Se dice que  $d$  es **dirección extrema** si, dadas  $d_1$  y  $d_2$ , direcciones de  $S$ , tales que  $d = \alpha d_1 + \beta d_2$  para algún  $\alpha, \beta > 0$ , entonces se tiene que  $d = d_1 = d_2$ .*

*Es decir,  $d$  no puede expresarse como combinación lineal positiva (estricta) de dos direcciones **distintas**.*

**Ejemplo 1.3.5** *En la Figura 1.8,  $d_1$  y  $d_2$  son direcciones extremas y toda otra dirección se escribe como combinación lineal positiva de ellas.*

Con lo que hemos hecho hasta aquí, una pregunta interesante es: ¿existirá alguna caracterización de las direcciones extremas, equivalente a la obtenida para puntos extremos?

Escribamos la matriz  $A$  que representa el poliedro escrito en la forma canónica tal como

en el caso de puntos extremos, es decir,  $A = [B, N]$  y consideremos  $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$  con  $B^{-1}a_j \leq 0$ , donde  $a_j$  es columna de  $N$ . El vector  $e_j$  tiene coordenadas nulas, salvo un 1 en la posición que indica el índice  $j$ .

Verifiquemos que  $d$  es dirección: en efecto,  $d \geq 0$  y

$$Ad = [B, N] \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = -BB^{-1}a_j + Ne_j = -a_j + a_j = 0.$$

Supongamos que no es extrema. Entonces existen  $d_1$  y  $d_2$ , direcciones de  $\mathcal{P}$  distintas entre sí, tales que  $d$  es combinación lineal positiva de ellas, es decir,

$$d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \text{ para algunos } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Entonces  $d_1$  y  $d_2$  tendrán necesariamente la forma:

$$d_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ \eta_1 e_j \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} d_{21} \\ \eta_2 e_j \end{pmatrix}$$

para algunos  $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ .

Como  $d_1$  y  $d_2$  son direcciones de  $\mathcal{P}$  entonces  $Ad_1 = Ad_2 = 0$ . Luego

$$\begin{aligned} [B, N] \begin{pmatrix} d_{11} \\ \eta_1 e_j \end{pmatrix} &= Bd_{11} + \eta_1 Ne_j = Bd_{11} + \eta_1 a_j = 0 \Rightarrow d_{11} = -\eta_1 B^{-1}a_j \\ [B, N] \begin{pmatrix} d_{21} \\ \eta_2 e_j \end{pmatrix} &= Bd_{21} + \eta_2 Ne_j = Bd_{21} + \eta_2 a_j = 0 \Rightarrow d_{21} = -\eta_2 B^{-1}a_j \end{aligned}$$

por lo tanto  $d_1 = d_2 = d$  (en el sentido de la igualdad de direcciones), lo que muestra que  $d$  es dirección extrema. De paso, se observa que  $\eta_1, \eta_2 \neq 0$  puesto que  $d_1$  y  $d_2$  son direcciones.

Lo explicado anteriormente nos permite formular el teorema de caracterización de direcciones extremas.

**Teorema 1.3.2** *Sea un poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es de rango  $m$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Una dirección  $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$  es dirección extrema de  $\mathcal{P}$  si y sólo si la matriz  $A$  se puede descomponer, eventualmente reordenando sus columnas, en la forma  $A = [B, N]$ ,*

donde  $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  es invertible y  $\bar{d}$  es un múltiplo positivo de  $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$  con  $B^{-1}a_j \leq 0$ , donde  $a_j \in N$  (es un vector columna de  $N$ ) y  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n-m}$ .

**Corolario 1.3.2** *El número de direcciones extremas de un poliedro en la forma canónica es finito.*

**Demostración.** Hay a lo más  $\binom{n}{m}$  formas de elegir  $B^{-1}$  y como hay  $n - m$  columnas en  $N$ , entonces  $(n - m) \binom{n}{m}$  es el número máximo de direcciones extremas. ■

**Ejemplo 1.3.6** *Volvamos al Ejemplo 1.3.3. De acuerdo al corolario anterior, existen 12 posibles direcciones extremas, por lo tanto no desarrollaremos el cálculo completo. Sólo consideraremos el siguiente caso: tomemos la matriz  $B$  formada por la segunda y cuarta columnas de  $A$ , es decir  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .*

*Luego  $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  y  $B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . El producto de  $B^{-1}$  con la primera columna de  $N$  no es negativo, por lo tanto, no nos permite calcular una dirección extrema. Sin embargo, el producto con la segunda columna de  $N$  es negativo. Tal como en el caso de puntos*

*extremos, sólo basta ordenar la información para decir que  $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  es dirección extrema*

*del poliedro.*

Para concluir esta sección, enunciaremos, sin demostrar, un teorema de caracterización que liga todo lo que hemos desarrollado en esta sección.

**Teorema 1.3.3** *Sea  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  es de rango  $m$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sean  $x_1, \dots, x_k$  los puntos extremos y  $d_1, \dots, d_l$  las direcciones extremas de  $\mathcal{P}$ . Entonces,  $x \in \mathcal{P}$  si y sólo si puede ser escrito como la suma de una combinación convexa de los puntos extremos y una combinación lineal positiva de las direcciones extremas, es decir,*

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

donde  $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \mu_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, l.$

**Teorema 1.3.4**  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$  tiene al menos una dirección si y sólo si  $\mathcal{P}$  es no acotado.

**Demostración.**

( $\implies$ ) Si  $\mathcal{P}$  tiene una dirección  $d$ , entonces es no acotado puesto que dado  $x \in \mathcal{P}$  se tiene que  $x + \lambda d \in \mathcal{P}, \forall \lambda \geq 0$  y por lo tanto  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|x + \lambda d\| = \infty.$

( $\impliedby$ ) Supongamos que  $\mathcal{P}$  es no acotado y que no posee direcciones. Entonces tampoco posee direcciones extremas y, por el teorema anterior, todo punto  $x \in \mathcal{P}$  puede escribirse de la forma  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ , para algunos  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$

Por la desigualdad triangular

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^k \|x_i\| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{P}$$

lo que contradice que  $\mathcal{P}$  sea no acotado. ■

# Capítulo 2

## Programación lineal

### 2.1. Introducción y ejemplos

Un problema de programación lineal (o *programa lineal*) se escribe de manera explícita como:

$$\begin{array}{rcccccc} (PL) \text{ mín} & c_1x_1 & + c_2x_2 & \dots & + c_nx_n & & \\ & a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \\ & & & & & & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array}$$

o en forma compacta como:

$$\begin{array}{r} (PL) \text{ mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde son dados  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , con  $m \leq n$ .

En la **función objetivo** o **criterio**  $c^T x$ , la variable  $x$  se conoce como **variable de decisión** o **nivel de actividad** y  $c$  como **vector de costos**.

El conjunto de restricciones  $\mathcal{P} = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$  es un poliedro cerrado y se llama **conjunto factible**. La matriz  $A$  se conoce como la **matriz de coeficientes técnicos** y  $b$  como **vector de recursos** o, simplemente, **lado derecho**.

**Observación 2.1.1** *Se cumple:*

- Si  $\mathcal{P}$  es acotado, entonces existe solución, pues se minimiza una función (lineal) continua sobre un conjunto compacto (el poliedro  $\mathcal{P}$  es cerrado).
- Si  $\mathcal{P}$  es no acotado, puede ocurrir que  $c^T x \rightarrow -\infty$ , con  $x \in \mathcal{P}$ .

**Definición 2.1.1** *Tres posibilidades para un problema (PL):*

- Se dirá que el problema (PL) es **acotado** si existe  $\bar{z} \in \mathbb{R}$  tal que  $\bar{z} \leq c^T x, \forall x \in \mathcal{P}$ .
- Se dirá que el problema (PL) es **no acotado** si existen  $d \in \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathcal{P}$  tales que  $x_0 + \lambda d \in \mathcal{P}, \forall \lambda \geq 0$  y  $c^T(x_0 + \lambda d) \rightarrow -\infty$  si  $\lambda \rightarrow \infty$ .
- Se dirá que el problema (PL) es **infactible** si  $\mathcal{P} = \emptyset$ .

**Observación 2.1.2** *Es evidente que si (PL) es no acotado, entonces  $\mathcal{P}$  es no acotado. La otra implicancia no siempre es cierta, como veremos cuando estudiemos cómo resolver un programa lineal.*

## Formas más usadas de un problema de programación lineal

Existen muchas formas de escribir un problema de programación lineal, pero algunas de las más habituales son:

1) Forma de desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{máx } & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

2) Forma estándar o canónica:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Estas dos formas son equivalentes pues los poliedros  $\{x/Ax = b, x \geq 0\}$  y  $\{x/Ax \leq b\}$  son equivalentes, en el sentido que se puede pasar de una forma a otra mediante cambios simples en las variables y restricciones, como por ejemplo:

- Pasar de  $\geq$  a  $\leq$  multiplicando la restricción por  $-1$ .
- Pasar de  $\leq$  a  $=$  usando una variable de holgura, es decir:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \text{ puede escribirse en la forma } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_j,$$

con  $x_{n+1} \geq 0$ . Notar que en este caso el problema aumenta en una variable por cada restricción de desigualdad convertida en igualdad.

- Una variable irrestricta  $x$  puede ser reemplazada por dos variables no negativas  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ , escribiendo  $x = x_1 - x_2$
- Maximizar  $c^T x$  es equivalente a minimizar  $-c^T x$

**Ejemplo 2.1.1** *El problema*

$$\begin{array}{rcl} \text{máx} & 4x_1 & +7x_2 \\ & x_1 & -3x_2 \geq 8 \\ & x_1 & \geq 0 \end{array}$$

es equivalente al problema (haciendo  $x_2 = u - v$ , con  $u, v \geq 0$ ).

$$\begin{array}{rcl} - \text{mín} & -4x_1 & -7u & +7v \\ & -x_1 & +3u & -3v \leq -8 \\ & & & x_1, u, v \geq 0 \end{array}$$

el cual es equivalente al problema canónico:

$$\begin{array}{rcl} - \text{mín} & -4x_1 & -7u + 7v \\ & -x_1 & +3u - 3v & +y = -8 \\ & & & x_1, u, v, y \geq 0 \end{array}$$

Plantear un problema de optimización requiere comprender la estructura del mismo y ser ordenado y creativo a la hora de darle forma.

## 2.2. Resolución de problemas de programación lineal: algoritmo Simplex

**Teorema 2.2.1** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro no vacío en la forma canónica y sea el problema*

$$(P) \begin{array}{l} \text{mín } c^T x \\ x \in \mathcal{P} \end{array}$$

*Entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*



(i)  $(P)$  es no acotado.

(ii)  $(P)$  tiene un vértice (punto extremo) como solución.

**Demostración.** Supongamos que existe una dirección extrema  $d$  tal que  $c^T d < 0$ . Entonces, dado que el poliedro es no vacío, elijamos  $x_0 \in \mathcal{P}$ . Es evidente que  $x_0 + \alpha d \in \mathcal{P}$  y que  $c^T(x_0 + \alpha d) \rightarrow -\infty$ , si  $\alpha \rightarrow \infty$ . Entonces  $(P)$  es no acotado, lo que prueba (i).

Contrariamente, supongamos que no existe una dirección extrema  $d$  tal que  $c^T d < 0$ . Entonces, aplicando el Teorema 1.3.3 (representación de puntos de un poliedro) al punto  $x_0$ , se tiene que

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

donde  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $\mu_j \geq 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, l$ .

Entonces, dado que  $c^T d_j \geq 0$  para todo  $j = 1, \dots, l$  tenemos

$$c^T x_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j c^T d_j \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_i$$

y si elegimos  $q$  tal que  $c^T x_q = \min\{c^T x_1, \dots, c^T x_k\}$  entonces

$$c^T x_0 \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x_q = c^T x_q$$

lo que muestra que  $x_q$  es solución de  $(P)$ , puesto que  $x_0$  es arbitrario en  $\mathcal{P}$ . Es decir, la solución se encuentra en un punto extremo. Esto termina la prueba. ■

### Motivación: solución gráfica en $\mathbb{R}^2$

Consideremos el siguiente problema lineal

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 \quad +x_2 \\ & 2x_1 \quad -x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \quad +2x_2 \leq 2 \\ & \quad \quad x_2 \geq 1 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

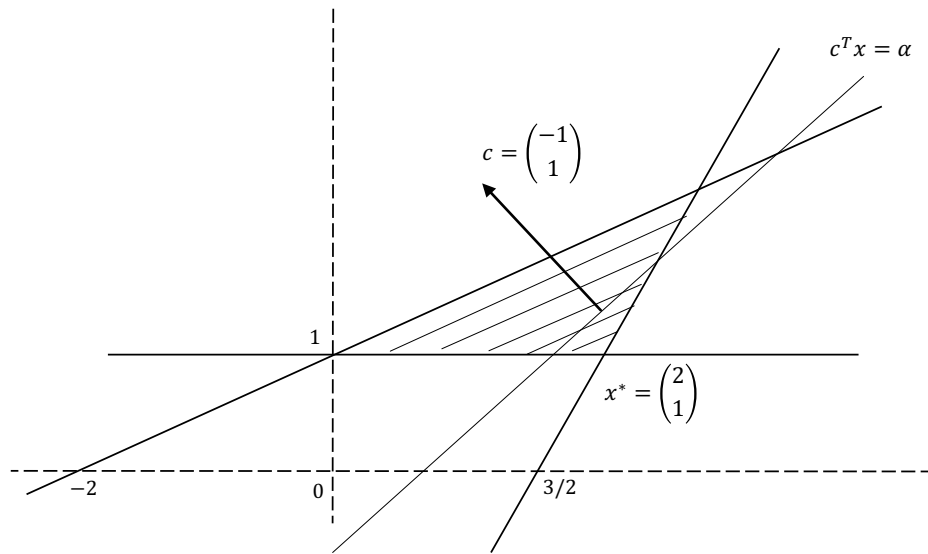


Figura 2.1: Solución gráfica en dimensión 2.

En un problema de minimización, lo que se hace gráficamente es desplazar en la dirección  $-c$ , la recta que representa la curva de nivel  $c^T x = \alpha$  de la función objetivo. En efecto, la dirección  $-c$  es la de máximo descenso. Con esto, tenemos que el valor óptimo será aquel que corresponde al último punto factible que la recta  $c^T x = \alpha$  alcance en su descenso.

En este caso corresponde al punto  $x_1^* = 2$ ,  $x_2^* = 1$ . Desgraciadamente, para dimensión mayor a 3, ya no es posible resolver estos problemas de manera gráfica.

Como se advierte del teorema anterior, para poder resolver un problema de programación lineal necesitamos sólo considerar los vértices del poliedro  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  como candidatos a solución óptima del problema. Para un número grande de variables ( $n$ ) y restricciones ( $m$ ) vimos también que el número de vértices puede ser enorme,  $\binom{n}{m}$ , por lo cual una metodología más sistemática se hace necesaria.

### 2.2.1. Fase II del algoritmo Simplex: mejorar solución en curso

El método Simplex, desarrollado por George Dantzig en los años cuarenta, tiene una idea geométrica muy simple: primero se encuentra una base factible (un vértice de  $\mathcal{P}$ ) y luego se pasa de vértice a otro, a través de las aristas de  $\mathcal{P}$  que sean direcciones de descenso para la función objetivo, generando una sucesión de vértices cuyos valores por  $z(x) = c^T x$  son decrecientes, con lo que se asegura que un mismo vértice no es visitado dos veces. Así, como el número de vértices es finito, el algoritmo converge en tiempo finito; esto significa que encuentra una solución óptima, o una arista a lo largo de la cual la función objetivo es no acotada.

A la búsqueda de una primera base factible se le llama Fase I del algoritmo Simplex (esto se verá más adelante). El resto del procedimiento (que describiremos a continuación) se conoce como Fase II.

Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ & x \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

con  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ .

Supondremos que  $A \in \mathcal{M}_{mn}$  es de rango  $m$ , entonces puede escribirse de la forma  $A = [B, N]$ , con  $B \in \mathcal{M}_{mm}$  invertible.

Notemos  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ . Entonces,  $Ax = Bx_B + Nx_N = b$  con lo que finalmente  $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ .

**Definición 2.2.1** *Las coordenadas del vector  $x_B$  se denominan **variables básicas** y las del vector  $x_N$  son las **variables no básicas**. Análogamente, a la matriz invertible  $B$  se le llama **base** y si se cumple que  $B^{-1}b \geq 0$  entonces se dice **base factible**.*

El problema (P) es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{mín } & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

o bien, reemplazando  $x_B$  en la función objetivo,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que la función objetivo original

$$z(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

coincide con la función

$$\hat{z}(x_N) = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N,$$

para  $x \in \mathcal{P}$ . Entonces, minimizar  $z(x)$  es equivalente a minimizar  $\hat{z}(x_N)$  y se obtiene trivialmente que el punto extremo  $\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  es óptimo cuando  $c_N^T - c_B^T B^{-1}N \geq 0$ , puesto que

$$z(\bar{x}) = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c_B^T B^{-1}b \leq c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N,$$

para todo  $x_N \geq 0$ .

**Definición 2.2.2** *La cantidad  $\pi^T = c_B^T B^{-1}$  es un vector fila que se conoce como **vector de multiplicadores del Simplex**. Esta terminología proviene de la interpretación de las coordenadas de  $\pi$  como multiplicadores de Lagrange. Daremos más adelante una interpretación económica de estos multiplicadores.*

**Definición 2.2.3** *El vector fila  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$  se denomina **vector de costos reducidos**.*

A continuación examinaremos por separado, con la ayuda de un ejemplo, los tres casos que pueden aparecer cuando estamos en presencia de un punto extremo y a partir de esto generaremos la formulación general del algoritmo Simplex.

## CASO 1: criterio de optimalidad

**Ejemplo 2.2.1** *Consideremos el siguiente problema, escrito en la forma canónica:*

$$\begin{array}{rcccc} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 \\ & x_1 & -x_2 & +5x_3 & -x_4 = 2 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 = 4 \\ & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Elijamos  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $N = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

donde:

$x_B$  : variables básicas o en la base ( $x_1, x_2$  en este caso),

$x_N$  : variables no-básicas o fuera de la base ( $x_3, x_4$  en este caso).

Se puede despejar  $x_1, x_2$  en función de  $x_3, x_4$  y reemplazar en la función objetivo. Entonces, el problema se escribe:

$$\begin{array}{rcccc} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 \\ & x_1 & & -3x_3 & +3x_4 = 6 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 = 4 \\ & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Como  $c_N^T - \pi^T N = (3, 1) \geq 0$ , la solución  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  es óptima.

**Criterio de optimalidad:**

En un problema de minimización escrito en la forma canónica, si las variables no básicas tienen asociado un vector de costos reducidos  $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N \geq 0$ , entonces la solución  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  es óptima.

**CASO 2: criterio de no acotamiento**

**Ejemplo 2.2.2** Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rcccc} \text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & -3x_3 & +x_4 \\ & x_1 & -x_2 & +5x_3 & -x_4 = 2 \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 = 4 \\ & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Habitualmente, los datos se ordenan en un cuadro:

$$\begin{array}{c|c} 0 & \bar{c}_N^T \\ \hline I & B^{-1}N \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} -\pi^T b \\ B^{-1}b \end{array}$$

Seguindo el procedimiento del CASO 1, encontramos la siguiente tabla:

		↓		
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
0	0	-3	1	$0 = -\pi^T b$
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4

Tal como en el ejemplo anterior,  $x = (6 \ 4 \ 0 \ 0)^T$  es una solución factible; pero no es óptima, pues  $\bar{c}_3 = -3 < 0$  y es claro que conviene que la variable  $x_3$  tome un valor positivo. Entonces observemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_4 + 6 + 3x_3 \\ x_2 &= -4x_4 + 4 + 8x_3 \end{aligned}$$

Dejando  $x_4 = 0$  (fuera de la base),  $x_3$  puede crecer indefinidamente, disminuyendo el valor de la función objetivo, sin violar las restricciones, dado que las variables  $x_1$  y  $x_2$  se mantienen positivas.

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 + 3x_3 \\ x_2 &= 4 + 8x_3 \end{aligned}$$

Este problema es no acotado, puesto que  $x_3$  puede crecer indefinidamente sin violar las restricciones del problema ( $P$ ) y la función objetivo tiende a  $-\infty$ .

**Criterio de no acotamiento:**

*Si un costo reducido es negativo y los elementos en la columna correspondiente son negativos o nulos, entonces el problema es no acotado. Si la columna es enteramente nula (incluyendo el costo reducido), la variable es irrelevante.*

**CASO 3: criterio de mejoramiento de la solución en curso**

**Ejemplo 2.2.3** *Veamos ahora el ejemplo:*

$$\begin{array}{rcll}
\text{mín} & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & -x_4 \\
& x_1 & -x_2 & +5x_3 & -x_4 = 2 \\
& & x_2 & -8x_3 & +4x_4 = 4 \\
& & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4
\end{array}$$

Escribamos la tabla:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
0	0	3	-1	0
1	0	-3	3	6
0	1	-8	4	4

La variable  $x_4$  es no básica y su costo reducido es negativo, luego conviene hacerla entrar a la base. Si hay más de una variable con costo reducido negativo, se elige cualquiera que cumpla esa condición, aunque en general se usa elegir aquella de costo reducido menor.

¿Hasta qué valor puede crecer  $x_4$ ? Veamos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & -3x_4 + 6 \\
x_2 & = & -4x_4 + 4 \\
x_3 & = & 0 \quad (\text{fuera de la base})
\end{array}$$

Como  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ , entonces a lo sumo se puede llevar  $x_4$  a su valor máximo, que es  $x_4 = \min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i4}} / \bar{a}_{i4} > 0\} = \min\{\frac{6}{3}, \frac{4}{4}\} = 1$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-z$
0	0	3	-1	0
1	0	-3	3	6
0	1	-8	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	4 $\rightarrow r$

**Criterio de pivoteo (mejorar solución en curso):**

Se hace entrar a la base alguna (cualquiera) variable no básica cuyo costo reducido sea negativo.

Sea  $x_s$  la elegida. Para decidir cuál es la variable que entra en su reemplazo, se considera el cuadro

$$\begin{array}{ccc|c} \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n & -\bar{z} \\ \hline \bar{a}_{11} & & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}$$

y se busca la fila  $r$  tal que

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\right\}$$

pivoteando luego sobre el coeficiente en la posición  $(r, s)$ , esto es, realizando operaciones elementales entre filas para dejar un 1 en la posición del pivote y ceros en el resto de esa columna.

**Algoritmo Simplex (Fase II)**

Consideremos de nuevo el cuadro factible del párrafo anterior, es decir, suponiendo que  $\bar{b}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , que la matriz  $A$  contiene una identidad (correspondiente a las columnas básicas) y que los costos reducidos de las variables básicas son nulos.

- (1) Si  $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ , entonces la solución en curso es óptima. Las variables básicas son iguales a  $\bar{b}_i$  y las no básicas son nulas.
- (2) Si  $\bar{c}_j < 0$  para algún  $j$ , la elegimos para entrar a la base. Usaremos el criterio descrito anteriormente de elegir la variable cuyo costo reducido es menor. Supongamos que dicha variable es la  $s$ .
- (3) Si  $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ , el problema es no acotado.
- (4) Si  $\bar{a}_{is} > 0$  para algún  $i$ , se determina  $r$  tal que  $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\right\}$  y se pivotea en  $\bar{a}_{rs}$ , para después volver a (1). Los coeficientes son modificados según:

$$\blacksquare \bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is}\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \quad \text{para } i \neq r$$



- $\bar{a}_{rj} \leftarrow \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$
- $\bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$  para  $i \neq r$
- $\bar{b}_r \leftarrow \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
- $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$
- $-\bar{z} \leftarrow -\bar{z} - \frac{\bar{c}_s\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$

**Observación 2.2.1** *Notar que esto corresponde precisamente al pivoteo de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*

**Ejemplo 2.2.4** *Consideremos*

$$\begin{array}{rcl} \text{mín} & -x_1 & -3x_2 \\ & x_1 & +x_2 \leq 3 \\ & -3x_1 & +x_2 \leq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

El problema, escrito en la forma canónica, queda:

$$\begin{array}{rcl} \text{mín} & -x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & & +x_4 = 2 \\ & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Entonces la tabla evoluciona de esta forma:

$$\begin{array}{c|ccc|c} \downarrow s & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 2 \rightarrow r \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc|c} \downarrow s & -10 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ \hline \boxed{4} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \rightarrow r \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5/2 & 1/2 & 17/2 \\ \hline 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 11/4 \end{array}$$

De este cuadro final identificamos  $x^* = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{11}{4} \quad 0 \quad 0\right)^T$  como la solución óptima y el valor óptimo es  $z^* = -17/2$

**Definición 2.2.4** Si una o más variables básicas son nulas, entonces la solución se dice *degenerada*. En caso contrario, la llamaremos **no-degenerada**.

**Observación 2.2.2** Cuando la solución  $x$  de un problema de programación lineal es degenerada, existe más de una base asociada a ese vértice. En efecto, si  $x \in \mathbb{R}^n$  tiene  $p < m$  componentes positivas, donde  $m$  es el número de restricciones del problema, entonces podrían haber  $\binom{n-p}{m-p}$  soluciones básicas factibles diferentes correspondientes a  $x$ . El punto  $x$  es el mismo, pero los conjuntos de variables etiquetadas básicas y no básicas son diferentes.

## 2.2.2. Fase I del algoritmo Simplex: obtener una solución inicial básica factible

Hasta ahora, sabemos resolver un PL dada una solución básica inicial. Cuando se trata de un problema de inecuaciones de tipo  $\leq$  y el lado derecho es positivo o nulo, entonces la base de partida es trivial: está dada por las variables de holgura. La Fase I del Simplex consiste en encontrar una base factible cuando identificarla no es trivial.

Sabemos que el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se puede resolver mediante el algoritmo Simplex, recorriendo puntos extremos de la forma

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

que se llaman soluciones básicas factibles.

El problema es conocer una solución básica factible para comenzar el algoritmo. Este problema, que corresponde a investigar la factibilidad de  $(P)$ , puede plantearse mediante el siguiente problema auxiliar:

$$(P_a) \quad \begin{aligned} \text{mín } & \sum_i x_{ai} \\ & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $x_a \in \mathbb{R}^m$ . Bajo el supuesto razonable  $b \geq 0$ , una solución básica factible evidente para este problema es  $x = 0$  y  $x_a = b$ , luego podemos usar la Fase II del algoritmo simplex para resolverlo.

El problema  $(P_a)$  se resuelve considerando  $B = I$  ( $x_a$  en la base),  $N = A$ ,  $c_B = \mathbf{1}^T$  y  $c_N = 0^T$ . Así, para este problema el cuadro inicial es:

$$\begin{array}{c|c|c} \bar{c}_N^T & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array} \iff \begin{array}{c|c|c} c_N^T - c_B^T A & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array} \iff \begin{array}{c|c|c} -\mathbf{1}^T A & 0 & -\mathbf{1}^T b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

donde  $\mathbf{1}$  es el vector que tiene todas sus coordenadas iguales a 1, de manera que  $\mathbf{1}^T b = b_1 + \dots + b_m$ . Las variables  $x_{ai}$  son llamadas *variables artificiales* y el propósito del problema  $(P_a)$  es llevarlas a tomar valores nulos. Esto es posible, siempre que el problema original tenga una solución factible. En tal caso, el método Simplex terminará con una solución básica factible, donde  $x_{ai} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ .

Si en el óptimo de  $(P_a)$  se tiene algún  $x_{ai} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ , entonces la solución en curso es solución factible de  $(P)$ . La solución de  $(P_a)$  satisface

$$[A \quad I] \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} = b,$$

con  $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \geq 0$ , luego  $\begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix}$  es solución de  $(P_a)$  si y sólo si  $x$  es solución de  $(P)$ .

Si en el óptimo de  $(P_a)$  se tiene algún  $x_{ai} > 0$ , entonces el poliedro es vacío, es decir,  $(P)$  es infactible.

### Ejemplo 2.2.5 Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \text{máx} & -x_1 & +2x_2 \\ & x_1 & +x_2 \geq 1 \\ & x_1 & -x_2 = 0 \\ & x_1 & \leq 4 \\ & & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{array}$$

Escribamos el problema en su forma canónica:

$$\begin{array}{rcll}
(P) & - \text{mín} & x_1 & -2x_2 \\
& & x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \\
& & x_1 & & & +x_4 & = & 4 \\
& & x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\
& & & & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4
\end{array}$$

Luego, agregando las variables artificiales  $x_5, x_6, x_7$  (son tres, dado el número de restricciones del problema  $(P)$ ), tenemos:

$$\begin{array}{rcll}
\text{mín} & & & & x_5 & +x_6 & +x_7 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = & 1 \\
x_1 & & & +x_4 & & +x_6 & = & 4 \\
x_1 & -x_2 & & & & & +x_7 & = & 0 \\
& & & & & & & & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7
\end{array}$$

Ya tenemos planteado el problema que necesitamos resolver. Escribamos la tabla y apliquemos el método Simplex<sup>1</sup>:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \begin{array}{ccccccc|c} -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad x^1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0)^T \leftarrow$$

Primera iteración:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad x^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0)^T \leftarrow$$

Segunda iteración:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad x^3 = \left( \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{7}{2} \ 0 \right)^T \leftarrow$$

<sup>1</sup>Las negrillas señalan las variables en la base para cada iteración.

Tercera iteración:

$$\begin{array}{cccc|ccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2
 \end{array}
 \quad x^4 = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{7}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

En la última iteración todas las variables artificiales salen de la base, los costos reducidos asociados toman todos el valor 1 y  $z = 0$ .

Ya tenemos una solución básica factible. Ahora eliminamos las variables artificiales y recalculamos los costos reducidos y el valor objetivo para esta solución:

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \\
 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2
 \end{array}$$

El vector de costos está dado por  $c^T = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 0)^T$ , por lo tanto:

$$c_B^T = (c_2 \quad c_4 \quad c_1)^T = (-2 \quad 0 \quad 1)^T, \quad c_N^T = (c_3) = (0)$$

El orden en que se escribe el costo para las variables básicas depende del vector en la base canónica que las mismas tienen asociado.

Reconozcamos las matrices  $B$  y  $N$  en el problema original ( $P$ ):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los costos reducidos serán:

$$\bar{c}_B^T = (0 \quad 0 \quad 0),$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - (-2 \quad 0 \quad 1) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ columna no básica del cuadro}$$

En tanto que:

$$-\pi^T b = (-2 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

Con esto el cuadro queda:

$$\begin{array}{cccc|c} & & \downarrow & & \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \rightarrow \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Iterando una vez según la Fase II algoritmo Simplex, obtenemos:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

con lo cual  $x^T = (4 \ 4 \ 7 \ 0)$  es solución óptima para el problema y el valor de la función objetivo es  $-(-\pi^T b) = 4$  (recordemos que hicimos el cambio  $\text{máx } z = -\text{mín}\{-z\}$ ).

## 2.3. Introducción a la programación lineal entera

### 2.3.1. Método de ramificación y acotamiento

En esta subsección presentamos una forma de resolver el problema de programación lineal con la restricción adicional de integridad de algunas de las variables. Un caso particular muy importante de esto es aquel en que algunas variables pueden tomar solamente los valores 0 ó 1 (variables binarias o de decisión). Suponiendo que los costos son números enteros, introduciremos el método a través de un ejemplo simple: consideremos

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & 51x_1 + 90x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \geq 45 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array}$$

El método funciona de la siguiente manera: se resuelve primero el problema relajado siguiente:

$$(P_0) \quad \begin{array}{rcl} \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\ & x_1 & +x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

La relajación corresponde a cambiar el conjunto  $\mathbb{N}$  por  $\mathbb{R}^+$ , pero en el caso de variables 0-1, la relajación correspondería a imponer restricciones del tipo  $x_i \in [0, 1]$ .

La solución de  $(P_0)$  es  $(x_1, x_2) = (\frac{9}{4}, \frac{15}{4})$ , con valor  $z_0^* = 452,25$ . Si denotamos  $z^*$  al desconocido valor óptimo de  $(P)$ , entonces, puesto que se ha resuelto una relajación de  $(P)$ , es claro que

$$z^* \geq 452,25 \tag{2.1}$$

pues la región factible de  $(P_0)$  contiene a la región factible de  $(P)$ .

Acotamos una de las variables ( $x_1$ ), que toma valor no entero, en la forma  $x_1 \leq 2$  o bien  $x_1 \geq 3$ . Eso divide la región factible en dos subregiones que conforman una partición de la región factible de  $(P)$ . Se resuelve por separado los dos subproblemas así generados:

$$(P_{11}) \quad \begin{array}{rcl} \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\ & x_1 & +x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\ & x_1 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \qquad (P_{12}) \quad \begin{array}{rcl} \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\ & x_1 & +x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\ & x_1 & \geq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

sabiendo que la solución de  $(P)$  se encuentra en una de las dos subregiones factibles de estos problemas  $(P_{11})$  y  $(P_{12})$ . Veamos entonces las soluciones de estos problemas:

- para  $(P_{11})$ :  $(x_1, x_2) = (2, 4)$ ,  $z_{11}^* = 462$ ;
- para  $(P_{12})$ :  $(x_1, x_2) = (3, \frac{10}{3})$ ,  $z_{12}^* = 453$ .

Dado que  $(P_{11})$  tiene solución entera, representa una solución factible para el problema original  $(P)$ . Entonces ese problema ya no dará origen a subproblemas, pues no hay variables para subdividir y se establece así una cota para la función objetivo:  $z^* \leq 462$ .

Análogamente, el problema  $(P_{12})$  tiene una solución no entera, de modo que se puede seguir ramificando dado que en esa zona podría encontrarse el óptimo. Así, usando (2.1), podemos afirmar por ahora que el valor óptimo satisface:

$$452,25 \leq z^* \leq 462$$

En esta etapa entonces podemos subdividir según el subproblema  $(P_{12})$ , en la forma:  $x_2 \leq 3$  o bien  $x_2 \geq 4$ . La variable  $x_2$ , en este caso, es la única que permite ramificar, pero en general puede haber muchas y en ese caso se elige cualquiera. Tenemos entonces dos subproblemas a partir de  $(P_{12})$ :

$$\begin{array}{rcl}
 (P_{21}) \text{ mín } & 51x_1 & +90x_2 \\
 & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & x_1 & \geq 3 \\
 & & x_2 \leq 3 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 (P_{22}) \text{ mín } & 51x_1 & +90x_2 \\
 & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & x_1 & \geq 3 \\
 & & x_2 \geq 4 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Las soluciones respectivas son:

- para  $(P_{21})$ :  $(x_1, x_2) = (\frac{18}{5}, 3)$ ,  $z_{21}^* = 453,6$ ;
- para  $(P_{22})$ :  $(x_1, x_2) = (3, 4)$ ,  $z_{22}^* = 513$ .

Esto entrega el nuevo intervalo:  $453,6 \leq z^* \leq 462$ .

Si denotamos  $(P_k)$  a un subproblema cualquiera de la ramificación, entonces se detiene el proceso de búsqueda en la rama correspondiente cada vez que ocurre una de las 3 situaciones siguientes:

- El subproblema  $(P_k)$  es infactible. Cualquier ramificación (que corresponde a agregar restricciones) que se haga de ahí en adelante generará subproblemas infactibles.
- El subproblema  $(P_k)$  entrega una solución entera. Dado que la región factible de  $(P_k)$  está contenida en la región factible del problema  $(P)$ , entonces la solución del subproblema es factible para  $(P)$  y por lo tanto provee una cota superior del valor óptimo  $z^*$  buscado.
- El subproblema  $(P_k)$  tiene solución no entera y su valor óptimo es mayor que la menor cota superior de  $z^*$  establecida por los subproblemas precedentes que han entregado soluciones enteras.

Para la aplicación de estas reglas hay que tener en cuenta que:

- Cada vez que se encuentra un subproblema con solución entera, se genera una cota superior de  $z^*$ .



- Cada vez que se encuentra un subproblema con solución no entera, se puede ramificar y se dispone de una nueva cota inferior de  $z^*$ .

Estos dos hechos permiten establecer una sucesión decreciente de intervalos que contienen el valor  $z^*$  y que pueden ser usados como criterio de detención, cuando no se busca necesariamente la solución óptima de  $(P)$ , sino que solamente una buena aproximación de ella.

En nuestro ejemplo, la rama a partir de  $(P_{22})$  debe detenerse por dos razones: tiene solución entera y también el valor  $z_{22} = 513$  es mayor que la mejor cota  $z^* \leq 462$ .

Contrariamente, se puede ramificar de nuevo a partir del problema  $(P_{21})$ , según la variable  $x_1$ , que toma el valor  $18/5$  en dicho problema. Siguiendo este proceso se llega finalmente a la solución del problema original:

- $(x_1^*, x_2^*) = (9, 0)$ ,  $z^* = 459$ ,

que proviene de la resolución del subproblema:

$$\begin{array}{rcll}
 (P_{81}) & \text{mín} & 51x_1 & +90x_2 \\
 & & x_1 & +x_2 \geq 6 \\
 & & 5x_1 & +9x_2 \geq 45 \\
 & & x_1 & \geq 3 \\
 & & & x_2 \leq 3 \\
 & & x_1 & \geq 4 \\
 & & & x_2 \leq 2 \\
 & & x_1 & \geq 6 \\
 & & & x_2 \leq 1 \\
 & & x_1 & \geq 8 \\
 & & & x_2 \leq 0 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Este método, si bien es convergente, puede ser muy ineficiente del punto de vista del inmenso número de subproblemas que puede ser necesario resolver para llegar a la solución. En el ejemplo aquí presentado, de sólo dos variables, ha sido necesario "bajar" hasta el noveno nivel del árbol y resolver 17 subproblemas para encontrar la solución. Mucha investigación se ha llevado a cabo con el fin de mejorar la eficiencia de este método básico y actualmente se dispone de muy buenas estrategias de solución para problemas muy grandes (varios miles o eventualmente millones de variables) de programación lineal mixta (con variables enteras y continuas).

Como último comentario, se puede observar que si se hubiese aproximado la solución del primer problema relajado ( $P_0$ ) al entero más cercano, se habría propuesto la solución aproximada

$$\blacksquare (x_1^*, x_2^*) = (2, 4), \quad z^* = 462,$$

que está bastante lejos de la solución exacta encontrada mediante el método. Ese es un peligro que se corre cuando se resuelve el problema relajado y luego se aproximan los valores de las variables al entero más cercano. Eventualmente este tipo de soluciones aproximadas puede ser infactible. Más abajo se muestra el diagrama de subproblemas que se genera en el ejemplo.

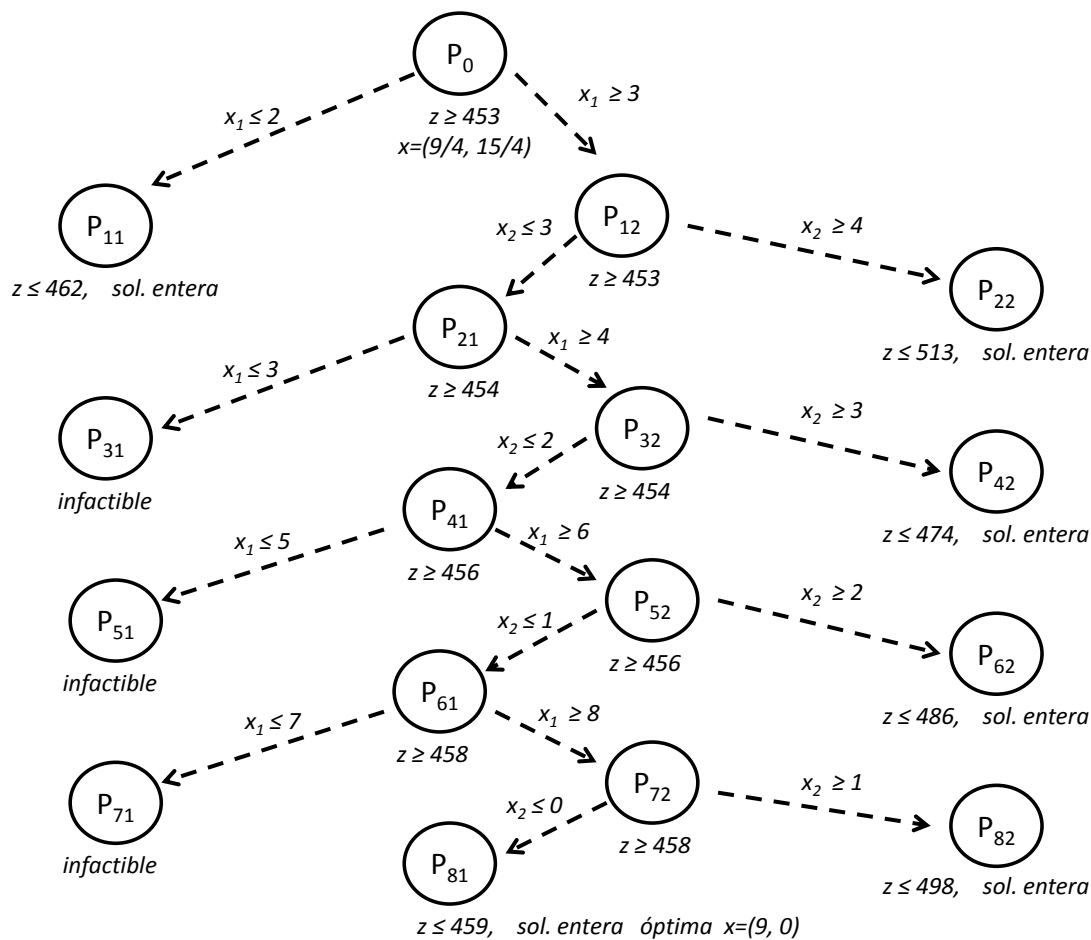


Figura 2.2: Árbol de subproblemas.

### 2.3.2. Algunas técnicas de modelamiento con variables enteras

Tal como vimos en la subsección anterior, en aplicaciones de la Optimización, especialmente en el caso lineal, es muy frecuente que aparezcan de manera natural variables que sólo toman valores enteros y, en muchos casos, variables binarias, es decir que solamente pueden tomar valor cero o uno. Estas últimas corresponden habitualmente a variables de decisión, es decir, variables que representan una actividad que puede o no ser realizada. En esta subsección entregaremos algunos ejemplos clásicos de uso de estas variables, los cuales pueden ser aplicados en numerosos casos, usando las analogías correspondientes.

Supongamos que hay  $n$  decisiones de tipo binario, representadas por variables

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si la actividad } i \text{ se realiza} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para fijar ideas, supondremos que la actividad  $i$  corresponde a la instalación (construcción) de una planta de producción de cierto producto, el cual es producido en cantidades enteras. Notemos mediante  $x_i$  la cantidad producida en esa planta. Analizaremos varios casos muy típicos para los cuales es necesario escribir las ecuaciones (restricciones) correspondientes.

1. Las actividades  $i$  y  $j$  son excluyentes (incompatibles), es decir no se deben realizar ambas. Esto se expresa con una ecuación de exclusión, del tipo

$$z_i + z_j \leq 1,$$

que significa que se puede construir a lo más una de ambas plantas.

Esta incompatibilidad puede afectar a un subconjunto cualquiera  $S$ , de las  $n$  actividades, lo cual se representa mediante

$$\sum_{k \in S} z_k \leq p,$$

que significa que a lo más  $p$  actividades del conjunto pueden ser realizadas.

2. Las actividades  $i$  y  $j$  son incluyentes entre sí, es decir, se debe construir ambas plantas o ninguna, lo cual se expresa simplemente mediante

$$z_i = z_j$$

3. Las actividades  $i$  y  $j$  son excluyentes, pero una de ellas debe realizarse:

$$z_i + z_j = 1$$

Ciertamente, si  $p$  de las actividades de un subconjunto cualquiera  $S$  deben realizarse, entonces se impone la condición

$$\sum_{k \in S} z_k = p$$

4. La realización de la actividad  $i$  obliga a la realización de la actividad  $j$ , es decir, la actividad  $j$  es requisito para realizar  $i$ :

$$z_i \leq z_j$$

Una generalización posible es el caso en que la actividad  $j$  es requisito de un conjunto de actividades  $S$ . En ese caso, se puede replicar la restricción anterior para cada una de las actividades del conjunto o bien se puede escribir todo en una sola inecuación, del tipo

$$\sum_{k \in S} z_k \leq cz_j,$$

donde  $c$  es la cardinalidad de  $S$ .

5. El costo total de instalación de las  $n$  plantas está dado por la expresión

$$\sum_{i=1}^n C_i z_i,$$

donde  $C_i$  representa el costo de la actividad  $i$ . Esta expresión puede ser usada como parte de la función objetivo o para representar una restricción de presupuesto total de construcción, del tipo

$$\sum_{i=1}^n C_i z_i \leq K,$$

siendo  $K$  el presupuesto disponible.

6. Si se desea relacionar la construcción de las plantas con la producción de ellas, se puede establecer

$$z_i \leq x_i \leq Q_i z_i.$$

Como interpretación, supongamos que se construye la planta, es decir  $z_i = 1$ , entonces la restricción define las cotas de producción de ella, entre una unidad de producto y la capacidad  $Q_i$  de la planta. Si la planta no se construye, es decir  $z_i = 0$ , entonces la producción  $x_i$  toma el valor cero, lo cual es esperable. Finalmente, si la producción es nula ( $x_i = 0$ ), entonces la variable  $z_i$  toma también el valor cero y por lo tanto la planta no se construye.

Los casos descritos son ilustrativos y muy frecuentes, pero por cierto existen numerosas e inesperadas situaciones que podrían ser modeladas usando una lógica similar a la expuesta.

## Capítulo 3

# Dualidad en programación lineal y aplicaciones

Comenzaremos el estudio de la dualidad en programación lineal con un ejemplo: una fábrica produce tres artículos en cantidades  $x_1, x_2, x_3$ , los cuales utilizan dos materias primas en su elaboración, digamos  $a$  y  $b$ .

El proceso de producción debe satisfacer lo siguiente:

- Para producir una unidad del artículo 1 se necesitan 2 unidades del recurso  $a$  y 5 del recurso  $b$ .
- Para producir una unidad del artículo 2 se necesitan 3 unidades del recurso  $a$  y 2 del recurso  $b$ .
- Para producir una unidad del artículo 3 se necesita 1 unidad del recurso  $a$  y 1 del recurso  $b$ .
- El recurso  $a$  está disponible hasta 10 unidades y el recurso  $b$  hasta 20 unidades.
- El precio unitario de venta del producto 1 es \$4, el del producto 2 es \$1 y el del producto 3 es \$5.
- El problema del fabricante será el de maximizar sus utilidades (sus ingresos por venta, en este ejemplo) sujeto a sus restricciones en la producción.

El problema se plantea entonces en la forma:

$$\begin{aligned}
(P) \quad \text{máx} \quad & 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Supongamos que estamos bajo competencia perfecta, de manera que el productor resuelve:

$$\begin{aligned}
(P) \quad \text{máx} \quad & c^T x \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

es decir, desea maximizar las utilidades dadas por el vector de precios  $c$ , sujeto a las restricciones de capacidad de su firma.

En el óptimo las restricciones no necesariamente se cumplen con igualdad, es decir podrían sobrar ciertas materias primas que se pueden vender en el mercado a un cierto precio, dado por el vector  $\lambda \geq 0$ . Entonces, lo que este productor resuelve es

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

lo cual en este ejemplo equivale a (dados  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ),

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + \lambda_1(10 - 2x_1 - 3x_2 - x_3) + \lambda_2(20 - 5x_1 - 2x_2 - x_3) \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Así, las utilidades de la firma están dadas por:

$$\varphi(\lambda) = \text{máx}\{\lambda^T b + (c - A^T \lambda)^T x \mid x \geq 0\} = \lambda^T b + \text{máx}\{(c - A^T \lambda)^T x \mid x \geq 0\}$$

que en el ejemplo corresponde a

$$\varphi(\lambda) = \lambda^T b + \text{máx}_{x_1, x_2, x_3 \geq 0} (4 - 2\lambda_1 - 5\lambda_2)x_1 + (1 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2)x_2 + (5 - \lambda_1 - \lambda_2)x_3$$

Las posibles soluciones de este problema son dos:

- Si el vector  $(c - A^T \lambda)$  tiene todas sus componentes negativas, dado que el vector  $x$  es positivo, se tiene que el máximo es cero, y  $\varphi(\lambda) = \lambda^T b$ .

- Si el vector  $(c - A^T \lambda)$  tiene alguna coordenada positiva, entonces, por el mismo argumento, el subproblema de maximización es no acotado, luego  $\varphi(\lambda) = \infty$ .

Entonces se tiene

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} b^T \lambda & \text{si } c - A^T \lambda \leq 0, \lambda \geq 0 \\ \infty & \text{si no} \end{cases}$$

que es la utilidad del productor, en función de  $\lambda$ . El mercado, "que es cruel", asigna al productor el mínimo de utilidad, a través de la fijación de precios. Como conoce la situación de costos e infraestructura (suponiendo información completa), entonces determina el vector de precios  $\lambda$  resolviendo

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T \lambda \\ & A^T \lambda \geq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

que es el problema dual asociado al problema  $(P)$  del productor. En el ejemplo, este problema es

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & 10\lambda_1 + 20\lambda_2 \\ & 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \geq 4 \\ & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 1 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 \geq 5 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

y quisiéramos averiguar si el valor  $z^*$ , **máximo de  $(P)$** , coincide con el valor  $w^*$ , **mínimo de  $(D)$** .

En efecto, en el ejemplo se observa que la solución de  $(P)$  es  $x^* = (0, 0, 10)^T$ , con  $z^* = 50$  y la solución de  $(D)$  es  $\lambda^* = (5, 0)^T$  con  $w^* = 50$ . La igualdad  $z^* = w^*$  es una propiedad que precisaremos en la sección siguiente.

### 3.1. Definición de dualidad y principales propiedades

**Definición 3.1.1** *Sea*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$



un problema que llamaremos **problema primal**. El problema:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

se llamará **problema dual de (P)**.

**Teorema 3.1.1** *La dualidad es simétrica, es decir, el dual de (D) es (P).*

**Demostración.** Para demostrar este teorema tomaremos el problema:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

y lo transformaremos para escribirlo en forma "primal", es decir, como un problema de maximización, con restricciones de tipo  $\leq$ , y positividad en las variables. Esto es, (D) es equivalente a:

$$(\tilde{D}) \quad \begin{array}{ll} - \text{máx} & (-b)^T y \\ & (-A)^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

El problema dual asociado a  $(\tilde{D})$ , según la definición anterior, es:

$$- \text{mín} \quad \begin{array}{ll} (-c)^T x \\ (-A)x \geq -b \\ x \geq 0 \end{array}$$

que a su vez es equivalente a:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que es entonces el dual de (D). ■

**Observación 3.1.1** *El teorema precedente muestra que la denominaciones de primal y dual son arbitrarias, en el sentido que ambos problemas son duales mutuos. Así, como se verá más adelante, cualquier problema puede ser denominado primal y su dual, que siempre existe, no es único, en el sentido que un mismo problema puede escribirse en más de una forma.*

*Una noción limpia de dualidad requiere que las variables de un problema pertenezcan a un espacio cuya dimensión sea igual al número de restricciones del dual (por restricciones entendemos las ecuaciones o inecuaciones lineales, sin incluir las condiciones de signo de las variables).*

El teorema siguiente muestra que la función objetivo del problema dual acota a la del primal y viceversa.

**Teorema 3.1.2 (Dualidad Débil)** *Sea*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

*un problema primal y*

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

*su dual. Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  denotan respectivamente los conjuntos factibles de (P) y (D), entonces para todo  $x \in \mathcal{P}$ ,  $y \in \mathcal{D}$ , se cumple*

$$c^T x \leq b^T y.$$

**Demostración.** Si multiplicamos por  $x^T$  ( $\geq 0$ ) la inecuación  $A^T y \geq c$ , se obtiene que  $x^T A^T y \geq x^T c$ , de donde  $c^T x \leq (Ax)^T y \leq b^T y$ , pues  $y \geq 0$ . ■

**Corolario 3.1.1** *Sean  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  puntos factibles para (P) y (D). Si  $c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$ , entonces  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  son óptimos respectivos.*

**Demostración.** Es consecuencia directa del Teorema de Dualidad Débil:

$b^T \tilde{y} = c^T \tilde{x} \leq b^T y \quad \forall y$  punto factible de (D), es decir,  $\tilde{y}$  es óptimo de (D).

$c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y} \geq c^T x \quad \forall x$  punto factible de (P), es decir,  $\tilde{x}$  es óptimo de (P). ■

**Observación 3.1.2** *El dual del problema de programación lineal estándar*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

es el problema

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

**Demostración.** Probaremos aquí que los problemas (P) y (D) están efectivamente en dualidad. Como la dualidad es un concepto simétrico, probaremos que el dual de (D) es (P) (también se podría hacer al revés).

Definiendo  $y = u - v$ , con  $u, v \geq 0$ , se puede escribir el problema (D) en la forma

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (b^T, -b^T) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ & [A^T, -A^T] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq c \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema tiene la forma del problema de producción descrito en la introducción de este capítulo y por lo tanto su dual se puede escribir, por definición, como

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Observación 3.1.3** *En el caso de la Observación 3.1.2, el Teorema de Dualidad Débil es también válido y se expresa así: si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  denotan respectivamente los conjuntos factibles de (P) y (D), entonces para todo  $x \in \mathcal{P}$ ,  $y \in \mathcal{D}$ , se cumple*

$$c^T x \geq b^T y.$$

**Demostración.** En efecto,  $b^T y = (Ax)^T y = x^T (A^T y) \leq c^T x$ .

**Teorema 3.1.3 (Dualidad Fuerte)** *Consideremos la pareja primal-dual*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

Entonces, para  $\tilde{z}$ , valor mínimo de (P) y  $\tilde{\omega}$ , valor máximo de (D), se tiene:

- a) Si  $\tilde{z}$  es finito, entonces  $\tilde{\omega}$  también lo es y se cumple  $\tilde{z} = \tilde{\omega}$
- b) Si  $\tilde{\omega}$  es finito, entonces  $\tilde{z}$  también lo es y se cumple  $\tilde{z} = \tilde{\omega}$
- c) Si (P) es no acotado, entonces (D) es infactible
- d) Si (D) es no acotado, entonces (P) es infactible

### **Demostración.**

- a) Dado que  $\tilde{z}$  es finito, existe un  $\tilde{x}$  (punto extremo o solución básica factible), que es solución de (P). Entonces existe también  $B$ , submatriz de  $A = [B, N]$ , tal que se puede escribir  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix}$ . Además, en el óptimo los costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir para  $\pi = B^{-T}c_B$  se tiene

$$c_N^T - \pi^T N \geq 0$$

lo que implica

$$N^T \pi \leq c_N.$$

Probaremos que  $\pi$  es solución óptima de (D), con lo cual,  $\tilde{\omega} = b^T \pi$  será finito.

En efecto,  $\pi$  es factible para (D), pues

$$A^T \pi = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} B^{-T} c_B = \begin{pmatrix} c_B \\ N^T \pi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = c$$

y  $\pi$  es óptimo para (D), pues

$$\tilde{\omega} \geq b^T \pi = b^T B^{-T} c_B = (c_B^T \quad c_N^T) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c^T \tilde{x} = \tilde{z}$$

por lo tanto, por el Teorema de Dualidad Débil,  $\tilde{\omega} = \tilde{z}$  y entonces  $\pi$  es óptimo.

b) Análogo.

c) Sabemos que  $(P)$  es no acotado. Supongamos entonces que existe  $\bar{y}$  tal que  $A^T \bar{y} \leq c$  (esto es la factibilidad del dual).

Por el Teorema de Dualidad Débil, se sabe que  $b^T \bar{y} \leq c^T x$  para todo  $x$  primal-factible. Esto dice que  $(P)$  es acotado, lo que establece una contradicción.

d) Análogo. ■

Resumamos los resultados anteriores en el siguiente cuadro:

		Primal		
		$\tilde{z}$ finito	(P) no acotado	(P) infactible
Dual	$\tilde{\omega}$ finito	Siempre	Nunca	Nunca
	(D) no acotado	Nunca	Nunca	Sí/No
	(D) infactible	Nunca	Sí/No	Sí/No

**Ejercicio 3.1.1** *Indique un ejemplo de un par primal-dual, en que ambos problemas sean infactibles.*

**Teorema 3.1.4 (Holgura Complementaria)** *Consideremos la pareja primal-dual*

$$\begin{array}{ll} (P) \text{ mín } & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D) \text{ máx } & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array}$$

Sean  $x^*$  e  $y^*$ , óptimos respectivos de  $(P)$  y  $(D)$ , y  $s^* = c - A^T y^*$ . Entonces  $x^{*T} s^* = 0$ .

Inversamente, si  $x^*$  e  $y^*$  son factibles para los problemas primal y dual, respectivamente, y si  $x^{*T} s^* = 0$ , entonces las soluciones  $x^*$  e  $y^*$  son óptimas respectivas para  $(P)$  y  $(D)$ .

**Demostración:** Por el Teorema de Dualidad Fuerte, si  $x^*$  e  $y^*$  son óptimos respectivos de  $(P)$  y  $(D)$ , entonces  $c^T x^* = b^T y^*$ , de donde se tiene

$$c^T x^* = b^T y^* = x^{*T} A^T y^* = x^{*T} (c - s^*) = x^{*T} c - x^{*T} s^*,$$

lo que implica  $x^{*T}s^* = 0$ .

Inversamente,  $x^{*T}s^* = 0$  implica que  $x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$ , es decir,  $c^T x^* - b^T y^* = 0$ , que es la condición de optimalidad de  $x^*$  e  $y^*$ . ■

**Observación 3.1.4** *La condición de holgura complementaria  $x^{*T}s^* = 0$  se puede expresar, en forma equivalente, por  $x_i^* s_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, n$ .*

**Observación 3.1.5** *La condición de holgura complementaria es válida para cualquier par de problemas en relación de dualidad, pero toma formas diferentes dependiendo de cómo los problemas han sido escritos. Por ejemplo, en el par de problemas*

$$\begin{array}{ll} (P) \text{ máx} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D) \text{ mín} & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

la holgura complementaria se expresa en la forma:

$$x_i^* s_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_j^* u_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

donde  $u^* = b - Ax^*$     $y^* s^* = A^T y^* - c$

## 3.2. Interpretación económica de la dualidad

El dual de un problema lineal surge naturalmente de las condiciones de optimalidad del problema primal ( $P$ ) (condiciones de Karush-Kuhn-Tucker). Mostraremos que si el problema primal tiene una interpretación económica, entonces también el dual y los valores óptimos de las variables duales pueden ser interpretados como precios.

Como ya vimos

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución básica factible para un programa lineal en la forma estándar. Bajo el supuesto que  $x_B > 0$ , una pequeña perturbación del lado derecho  $\Delta b$  no provoca un cambio en la base

óptima. Luego, cuando  $b$  es reemplazado por  $b + \Delta b$ , la nueva solución óptima se transforma en

$$x' = \begin{pmatrix} x'_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el valor óptimo de la función objetivo se perturba en

$$\Delta z = c_B^T B^{-1} \Delta b = \pi^{*T} \Delta b$$

donde  $\pi^* = B^{-T} c_B$  es el multiplicador del problema primal en el óptimo. Como probamos en el Teorema de Dualidad Fuerte,  $\pi^*$  es la solución óptima del problema dual. Claramente,  $\pi_i^*$  puede verse como el precio marginal del  $i$ -ésimo recurso (es decir, el lado derecho  $b_i$ ), ya que da el cambio en el valor objetivo óptimo por unidad de incremento en ese recurso. Esta interpretación puede ser muy útil, pues indica la cantidad máxima que uno está dispuesto a pagar por aumentar la cantidad del  $i$ -ésimo recurso. Note que las condiciones de holgura complementaria implican (ver Observación 3.1.5) que el precio marginal para un recurso es cero si tal recurso no fue completamente utilizado en el óptimo. Otros nombres dados a este precio en el óptimo son *precio sombra* y *precio de equilibrio*.

### 3.3. Dual de cualquier problema lineal

La tabla siguiente permite deducir fácilmente el dual de cualquier problema de programación lineal.

Prob. de minimización	Prob. de maximización
tipo de restricción	variable asociada
$\leq$	$\leq 0$
$\geq$	$\geq 0$
$=$	irrestricida
tipo de variable	restricción asociada
$\geq 0$	$\leq$
$\leq 0$	$\geq$
irrestricida	$=$

**Ejercicio 3.3.1** Verificar que el problema  $(P)$  tiene a  $(D)$  como dual asociado. La idea es hacerlo usando la tabla anterior, sin agregar o desdoblar variables ni transformar las

restricciones de (P). El número de variables de (D) debe ser igual al número de restricciones de (P) y viceversa.

$$\begin{array}{rcll}
 (P) \text{ máx} & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \text{variables duales} \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 10 & (y_1) \\
 & -8x_1 & +x_2 & & = 10 & (y_2) \\
 & x_1 & -x_2 & +5x_3 & \geq 50 & (y_3) \\
 & 3x_1 & & +x_3 & \leq 20 & (y_4) \\
 & & & x_2, x_3 & \geq 0 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 (D) \text{ mín} & 10y_1 & +10y_2 & +50y_3 & +20y_4 & \text{variables duales} \\
 & y_1 & -8y_2 & +y_3 & +3y_4 & = 1 & (x_1) \\
 & y_1 & +y_2 & -y_3 & & \geq 2 & (x_2) \\
 & y_1 & & +5y_3 & +y_4 & \geq 4 & (x_3) \\
 & & & & y_1, y_4 & \geq 0 & \\
 & & & & y_3 & \leq 0 & 
 \end{array}$$

### 3.4. Algoritmo Simplex-dual

En esta sección consideramos la pareja primal-dual de más abajo y suponemos que hemos identificado una base que posee la propiedad de tener costos reducidos asociados positivos, pero el lado derecho del sistema  $\bar{b}$  no es positivo.

$$\begin{array}{rcl}
 (P) \text{ mín} & c^T x & \\
 & Ax = b & \\
 & x \geq 0 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 (D) \text{ máx} & b^T y & \\
 & A^T y \leq c & 
 \end{array}$$

Al cuadro correspondiente del algoritmo Simplex le denominamos *dual-factible*, es decir,  $\bar{c}_N^T \geq 0$ , pero no necesariamente se tiene  $\bar{b} \geq 0$ .

0	$\bar{c}_N^T$	$-\bar{z}$
$I$	$\bar{N}$	$\bar{b}$

Entonces, consideramos:



- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$  (condición de dual-factibilidad)
- $\bar{N} = B^{-1} N, \quad \bar{b} = B^{-1} b, \quad \bar{A} = [I, \bar{N}]$

De la primera expresión notamos que para  $\pi = B^{-T} c_B$  tenemos que

$$c_N^T - \pi^T N \geq 0,$$

lo cual implica

$$B^T \pi = c_B$$

$$N^T \pi \leq c_N$$

Es decir,  $A^T \pi \leq c$ , lo que indica que  $\pi$  es una solución factible del problema dual.

El Algoritmo Simplex-dual opera de manera de mantener la condición de dual-factibilidad  $\bar{c}_N^T \geq 0$ , pero intentando satisfacer la condición de primal-factibilidad  $\bar{b} \geq 0$ . Los siguientes pasos resumen el algoritmo:

- (1) Si  $\bar{b} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$ , entonces la solución en curso es óptima, de manera que

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\pi} = B^{-T} c_B$$

son las soluciones óptimas respectivas de  $(P)$  y  $(D)$ . Si no, ir a (2).

- (2) Elegir cualquier  $r$  tal que  $\bar{b}_r < 0$ .

- Si  $\bar{a}_{rj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$  entonces el problema *dual es no acotado*, es decir, el problema primal es infactible.
- Si algún  $\bar{a}_{rj} < 0$ , pasar a (3).

- (3) Elegir la columna  $s$  tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

e ir a (4).

- (4) Pivotear en la posición  $(r, s)$  y volver a (1).

## 3.5. Introducción al análisis post-optimal

Muchas veces, una vez resuelto el problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

se desea examinar el comportamiento de la solución si se modifica alguno de sus parámetros. Algunos de estos cambios pueden ser:

- Variación en los coeficientes de la función objetivo.
- Variación en el vector de recursos.
- Introducción de una nueva variable.
- Introducción de una nueva restricción.

Puede suceder que nuestro problema sea muy complejo y no se desee resolver completamente de nuevo para analizar estos cambios, por ejemplo por problemas de tiempo de cómputo. Las siguientes subsecciones examinan estos casos, sobre la base de ejemplos simples. El estudio del comportamiento de la solución de un problema lineal, como función de ciertos parámetros del problema, también se conoce como *análisis de sensibilidad*.

### 3.5.1. Variación en los coeficientes de la función objetivo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & -20x_1 \quad -16x_2 \quad -12x_3 \\ & x_1 & & & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 1600 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una solución inicial es  $x_0 = (0, 0, 0)^T$  (notar que es un punto extremo del poliedro). El cuadro Simplex inicial es:

$$\begin{array}{cccccc|c}
-20 & -16 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1600
\end{array}$$

Luego de pivotar, se llega al siguiente cuadro final:

$$\begin{array}{cccccc|c}
4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400
\end{array}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} \quad x_{holg} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base está compuesta por  $[x_3, x_2, x_4]$  y el valor óptimo es -14400. ¿Qué sucede si nos informan que el coeficiente  $c_1$  vale -30 en lugar de -20?

Examinemos los costos reducidos (los demás elementos del cuadro, es decir,  $B^{-1}N$ ,  $B^{-1}b$ , y  $c_B^T B^{-1}b$  no sufren alteraciones, dado que  $c_1$  no participa en ellos). Tenemos que  $\bar{c}_5 = 8$  y  $\bar{c}_6 = 4$  no se modifican, y  $\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1}A_1 = -30 - (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$ .

Por esto, el cuadro final cambia a uno que no satisface optimalidad:

$$\begin{array}{cccccc|c}
-6 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400
\end{array}$$

Por lo tanto se puede pivotar para mejorar la solución en curso, haciendo entrar  $x_1$  a la base:

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 3 & 0 & 14 & 1 & 15600 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 200 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 200
\end{array}$$

y la nueva solución es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{holg} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base cambió a  $[x_1, x_2, x_4]$  y el valor mínimo cayó a -15600.

¿Qué sucede si  $c_1 = -20$  se modifica a  $c_1 = -20 + \theta$ ? Retomemos el asunto:

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} a_1 = (-20 + \theta) - (-12 \quad -16 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + \theta,$$

que es positivo cuando  $\theta \geq -4$ . Es decir, el rango para el coeficiente  $c_1$  con el que la base óptima  $[x_3, x_2, x_4]$  no cambie es  $c_1 \geq -24$ .

Veamos otro caso. Supongamos ahora que el coeficiente perturbado es  $c_2 = -16$  y pasa a ser  $-16 + \gamma$ . El vector de costos queda:

$$c = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 + \gamma \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que las tres primeras componentes de este vector corresponden a los costos estructurales y las últimas tres corresponden a las variables de holgura, y por lo tanto son cero. Examinemos los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1} N \\ &= (-20, \quad 0, \quad 0) - (-12, \quad -16 + \gamma, \quad 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (4, \quad 8 + \gamma, \quad 4 - \gamma) \end{aligned}$$

Estos costos reducidos de las variables no básicas son positivos, es decir preservan la optimalidad, cuando:

$$-8 \leq \gamma \leq 4$$

o sea, la base  $[x_2, x_3, x_4]$  no cambia si:

$$-24 \leq c_2 \leq -12$$

En general, si el vector  $c$  cambia a  $\tilde{c}$  se debe evaluar  $\tilde{c}_N^T = \tilde{c}_N^T - \tilde{c}_B^T B^{-1} N$  y decidir:

- si  $\tilde{c}_N^T \geq 0$ , la base óptima no cambia y sólo hay que reevaluar  $\tilde{c}_B^T B^{-1}b = z^*$ .
- si  $\tilde{c}_N^T \not\geq 0$ , se itera con algoritmo Simplex.

### 3.5.2. Variación en el vector de recursos (o lado derecho)

Tomemos el mismo ejemplo y supongamos que el vector  $b$  cambia a  $\tilde{b}$ . La base óptima para  $b$  es  $[x_3, x_2, x_4]$  entonces se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz  $B^{-1}$  es parte del cuadro final. Se tiene que:

- Si  $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$ , la base en curso aún es óptima, pero la nueva solución es  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\tilde{b} \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- Si  $B^{-1}\tilde{b} \not\geq 0$ , la solución no es factible (primal), pero los costos reducidos no han sufrido cambios, luego el cuadro final presenta una solución primal-infactible y dual-factible. Entonces se debe iterar con el algoritmo Simplex-dual.

Veamoslo con un ejemplo: supongamos que  $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix}$ , por lo tanto:

$$B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} \geq 0$$

Así, la base óptima no cambia, pero:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 400 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además,  $z^* = c_B^T B^{-1} \tilde{b} = (-12, -16, 0) \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = -14400$ .

Una pregunta interesante es: ¿cuál es el rango para  $\tilde{b}$ , de modo que la base óptima no se modifique? Para ello, basta calcular:

$$B^{-1} \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{b}_2 - \tilde{b}_3 \\ -\tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

De aquí se deduce que para que se cumpla la condición de optimalidad se debe tener:

$$\tilde{b}_1 \geq 0, \quad \tilde{b}_2 \leq \tilde{b}_3 \leq 2\tilde{b}_2$$

Notemos que en este ejemplo los datos originales satisfacen estas condiciones.

### 3.5.3. Introducción de una nueva actividad (o variable)

Supongamos que, en el ejemplo, se introduce la variable  $x_4$  con costo  $c_4 = -10$  y coeficientes

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en la matriz, es decir, el problema se transforma en:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & -10x_4 & \\ & x_1 & & & +x_4 & \leq 400 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 1000 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 1600 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

y el cuadro inicial es (incluyendo las variables de holgura):

-20	-16	-12	<b>-10</b>	0	0	0	0
1	0	0	<b>1</b>	1	0	0	400
2	1	1	<b>0</b>	0	1	0	1000
2	2	1	<b>1</b>	0	0	1	1600

Si se realiza la misma secuencia de iteraciones para alcanzar la base óptima del problema original, el cuadro final es:

$$\begin{array}{cccc|ccc|c} 4 & 0 & 0 & -6 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}$$

Aquí, conviene observar que:  $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4$ , es decir,

$$\bar{c}_4 = -10 - (-12, -16, 0) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Además:

$$B^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, basta agregar la columna correspondiente a la nueva variable en el cuadro final original. Esta columna es:

$$\begin{pmatrix} c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \\ B^{-1} A_4 \end{pmatrix}$$

en que  $c_4$  es el costo de la variable nueva y  $A_4$  es el vector columna de dicha variable, en la matriz de restricciones.

En este caso, la nueva variable tiene costo reducido  $-6 < 0$ , y por lo tanto puede entrar a la base. Así, al iterar, el cuadro queda:

$$\begin{array}{cccc|ccc|c} 10 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 4 & 16800 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 800 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 200 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}$$

La nueva variable permite disminuir el costo total desde -14400 a -16800 siendo la solución final:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo, si nos interesara calcular para qué valores del nuevo costo  $c_4$  la variable introducida es irrelevante en el óptimo (es decir, no pertenece a la base óptima), la condición sería  $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 \geq 0$ , lo que implica  $c_4 \geq c_B^T B^{-1} A_4 = -4$ .

**Observación 3.5.1** ¿Podría la nueva variable producir no acotamiento? La respuesta es sí. La condición para ello es  $\bar{c}_4 < 0$  y  $B^{-1} A_4 \leq 0$ .

### 3.5.4. Introducción de una nueva restricción

Estamos tratando el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Cuyo cuadro óptimo, salvo reordenamiento, está dado por:

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Supongamos que se agrega la restricción:

$$d^T x \leq d_0$$

En que  $d \in \mathbb{R}^n$  y  $d_0 \in \mathbb{R}$ . Es decir, agregamos:

$$d^T x + x_{n+1} = d_0$$

Con  $x_{n+1}$  una variable de holgura. Así, el problema original se puede plantear como:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c_B^T x_B + c_N^T x_N + 0x_{n+1} \\ & Bx_B + Nx_N + 0x_{n+1} = b \\ & d_B^T x_B + d_N^T x_N + x_{n+1} = d_0 \\ & x_B, x_N, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$



en que  $d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$ . O bien, el nuevo problema es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (c^T \ 0) \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ & \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Agreguemos  $x_{n+1}$  a la base, es decir propongamos:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^T & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo se modifica el cuadro final? Veamos término a término:

- $\tilde{c}_N^T = c_N^T - (c_B^T \ 0) \tilde{B}^{-1} \begin{bmatrix} N \\ d_N^t \end{bmatrix} = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$  (los costos reducidos no cambian)
- $\tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -d_B^T B^{-1}b + d_0 \end{pmatrix}$
- $(c_B^T \ 0) \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1}b.$

0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	0	$-c_b^T B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	0	$B^{-1} b$
0	$d_N^T - d_B^T B^{-1} N$	1	$d_0 - d_B^T B^{-1} b$

Luego,

- Si  $d_0 - d_B^T B^{-1}b \geq 0$ , la solución propuesta en los datos originales sigue siendo óptima, sólo que la holgura  $x_{n+1}$  entra a la base con valor  $d_0 - d_B^T B^{-1}b$ .
- Si  $d_0 - d_B^T B^{-1}b < 0$ , la solución propuesta *no es factible*, pues la holgura  $x_{n+1}$  toma un valor negativo. Iterar con algoritmo Simplex-dual, pivoteando sobre la fila agregada. En este caso, si  $d_N^T - d_B^T B^{-1}N \geq 0$ , el problema (primal) es infactible, dado que el dual es no acotado.

Retomemos el problema del inicio:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{mín} & -20x_1 & -16x_2 & -12x_3 & \\
 & x_1 & & & \leq 400 \\
 & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1000 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 1600 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
 \end{array}$$

Si se agrega la restricción:  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 800$ , es decir,

- $d_0 = 800$
- $d^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$

Entonces,

- $d_B^T = (1, 1, 0) \quad [x_3, x_2, x_4]$
- $d_N^T = (1, 0, 0) \quad [x_1, x_5, x_6]$
- $d_N^T - d_B^T B^{-1}N = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1, -1, 0)$
- $d_0 - d_B^T B^{-1}b = 800 - (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix} = -200$

El cuadro óptimo del problema original,

$$\begin{array}{cccccc|c}
 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 14400 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 400 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400
 \end{array}$$

se transforma en (agregando una fila y una columna):

$$\begin{array}{cccccc|c}
 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & \mathbf{0} & 14400 \\
 \hline
 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \mathbf{0} & 400 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & 600 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 400 \\
 -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -200
 \end{array}$$

Al pivotar con Simplex-dual, la última variable sale de la base (entra la primera) generando un nuevo cuadro óptimo y una nueva solución:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \mathbf{4} & 13600 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{2} & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & 600 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \mathbf{1} & 200 \\
 \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{200}
 \end{array}$$

de modo que  $x^* = (200, 600, 0, 200, 0, 0, 0)^T$  y  $z^* = -13600$ .

Esta técnica para recalcular soluciones óptimas cuando se ha agregado una restricción, puede ser muy útil en la resolución de problemas de programación lineal entera mediante el método de ramificación y acotamiento, explicado anteriormente.

# Capítulo 4

## Modelos para flujos en redes

Esta área de la Optimización es muy importante ya que existen muchos problemas de estructura particular que se pueden expresar mediante la noción de grafo o red. Muchos de estos problemas ya estaban planteados y concitaban el interés de los matemáticos e ingenieros antes de la aparición formal de la programación lineal.

### 4.1. Motivación y descripción de problemas clásicos

En este capítulo introduciremos el problema de flujo de costo mínimo (*FCM*), a través de cuatro problemas específicos que son casos particulares de él:

- a) Problema de asignación
- b) Problema de transporte
- c) Problema de flujo máximo
- d) Problema del camino más corto

**Definición 4.1.1** Un **grafo** es un par  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{N}$  es un conjunto finito y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ . A los elementos en  $\mathcal{N}$  se les llama **nodos** y a los pares ordenados en  $\mathcal{A}$  se les llama **arcos**.

Notemos que los arcos son *dirigidos*, es decir, el par  $(i, j) \in \mathcal{A}$  es distinguible del par  $(j, i) \in \mathcal{A}$ , que representa un arco en el sentido contrario. En el grafo de la figura la cantidad entre paréntesis ( $b$ ) representa la oferta en cada nodo (si  $b > 0$  el nodo **ofrece** la cantidad  $b$ ,

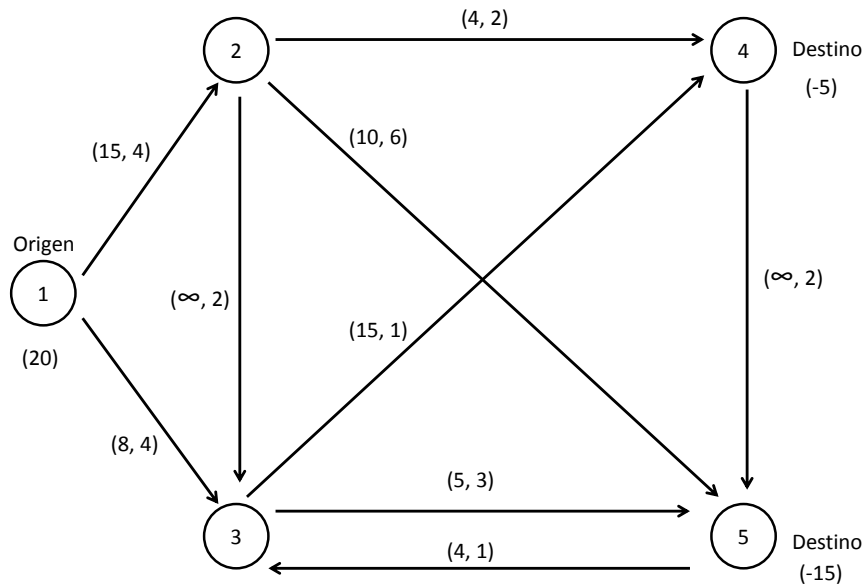


Figura 4.1: Ejemplo de un grafo o red.

si  $b < 0$  el nodo **demanda** la cantidad  $b$ , si es cero entonces es un nodo de **trasbordo**). La notación  $(u_{ij}, c_{ij})$  sobre cada arco, indica la capacidad o cota superior del arco  $u_{ij}$  y el costo unitario  $c_{ij}$  del flujo  $x_{ij}$ , que es la cantidad enviada desde  $i$  a  $j$ . En general, sobre los arcos se puede imponer cotas inferior y superior, del tipo  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ .

El problema general corresponde a encontrar un flujo factible, de costo mínimo. Entonces el problema es:

$$\begin{aligned}
 (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

La primera restricción dice que lo que entrega el nodo  $i$  es igual a su oferta más lo que recibe, dado que el término del lado izquierdo representa la **diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante al nodo**. La segunda restricción, dice que el flujo sobre un arco debe respetar entre las cotas del mismo (en muchos casos se usa  $l_{ij} = 0$  y  $u_{ij} = \infty$ ).

Notemos que cada arco aparece sólo en dos restricciones ya que un arco participa solamente en dos nodos: en uno como arco entrante y en otro como arco saliente. Cabe destacar que la matriz  $A$  resultante es de rango incompleto (igual a  $n - 1$ , en que  $n$  es la cardinalidad de  $\mathcal{N}$ ). En efecto, la suma de las filas es cero, es decir son linealmente dependientes. Como haremos en lo que sigue el supuesto (esencial en todo este capítulo) que

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0,$$

es decir que la oferta iguala a la demanda, entonces el sistema de ecuaciones del problema ( $FCM$ ) tiene una ecuación redundante. En todo caso, ese supuesto no hace perder generalidad al tratamiento de los problemas que veremos más adelante.

Normalmente, las variables estructurales del problema son consideradas enteras, de manera que el problema general de flujo de costo mínimo puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ & Ax = b \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \\ & x_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ciertamente, es posible levantar la restricción de integridad de las variables y el problema sigue teniendo sentido, pero en este texto nos remitimos al caso de variables enteras. Los datos del problema del ejemplo de la figura pueden entonces resumirse en la siguiente tabla:

nodo/costo	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{45}$	$x_{53}$	oferta
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	20
2	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	-1	-1	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-5
5	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	1	-15
capacidad	15	8	$\infty$	4	10	15	5	$\infty$	4	

Las filas 1 a 5 de este cuadro representan las restricciones de equilibrio y se observa que la matriz  $A$  tiene las filas linealmente dependientes (suman cero). De hecho, en cada columna hay solamente dos coeficientes no nulos, un 1 y un -1, dado que cada arco es emergente para un nodo e incidente para otro. El rango de la matriz  $A$  es  $n - 1$ , puesto que basta eliminar una fila de ella para que las filas restantes sean linealmente independientes. Esta es una

propiedad general de la matriz de restricciones de equilibrio en el problema ( $FCM$ ).

En lo que sigue del capítulo describiremos los 4 problemas antes mencionados, para luego entregar un método de resolución del problema de transporte y una forma de mejorar soluciones factibles del problema más general ( $FCM$ ).

#### 4.1.1. Problema de asignación

Supongamos que el gerente de algún gran supermercado, que consta de 50 cajas, desean saber cómo asignar 50 cajeras a estas cajas, de manera que el rendimiento sea el mejor posible (medido según algún criterio). Si hiciéramos esta asignación probando cada configuración de cajeras y cajas, entonces el tiempo para encontrar la mejor sería simplemente prohibitivo, aún para los computadores más rápidos disponibles. Un buen ejercicio para mejor comprender esta complejidad es estimar el tiempo de ejecución si el computador pudiese realizar un millón de estas evaluaciones por nanosegundo ( $10^{-9} \text{ seg.}$ ), sabiendo que son  $50!$  configuraciones a evaluar (es decir, del orden de  $10^{65}$ ). Es aquí donde entra a jugar un papel importante la programación lineal, como una forma científica de eliminar muchos millones de configuraciones mediante simples criterios de comparación y una sucesión de cálculos relativamente más sencillos.

Las variables en este caso son:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al nodo (cajera) } i \text{ le corresponde el nodo (caja) } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Este problema se escribe:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{a cada cajera, una sola caja}) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{a cada caja, una sola cajera}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Los coeficientes  $c_{ij}$  representan los rendimientos de las cajeras en cada caja y la función objetivo persigue maximizar el rendimiento total.

Este problema de asignación es claramente un caso particular del problema ( $FCM$ ) planteado al inicio del capítulo. En este caso, los nodos-cajera tienen oferta igual a 1 (pueden

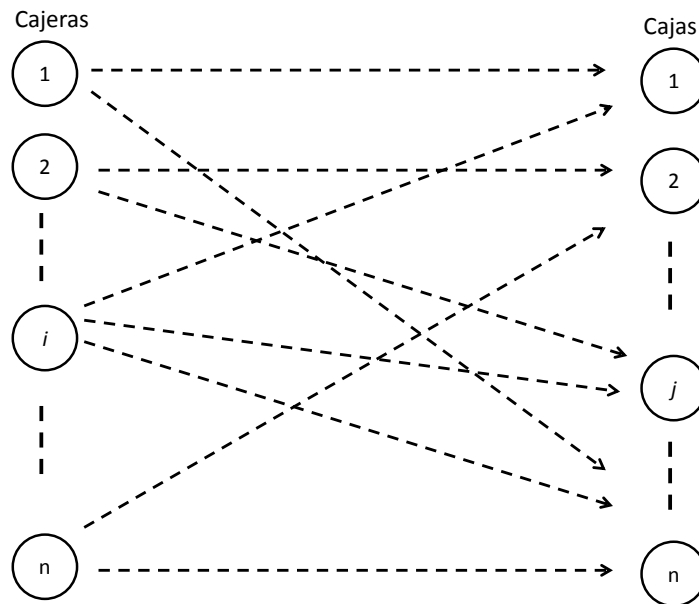


Figura 4.2: Problema de asignación. Hay  $n \times n$  arcos, que corresponden a las variables del problema.

realizar un servicio) y los nodos-caja tienen demanda igual a 1 (solicitan ser servidos por una cajera). Los nodos-cajera no tienen arcos entrantes pues no demandan y, similarmente, los nodos-caja no tienen arcos salientes, pues no ofrecen. Las variables son enteras, con cotas 0 y 1.

#### 4.1.2. Problema de transporte

Consideremos un grafo con un conjunto de  $n$  nodos de partida, con ofertas  $a_i \geq 0, i = 1, \dots, n$  y  $m$  nodos de llegada con demandas  $b_j \geq 0, j = 1, \dots, m$ . Cada arco  $(i, j)$  tiene asociado un costo unitario de transporte  $c_{ij}$ .

Supongamos, por ahora, que

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

es decir, la oferta total es igual a la demanda total. Esta condición no es restrictiva, en el sentido que si hubiese discrepancia, bastaría crear un nodo artificial en las ofertas o en las demandas, según sea el caso, pero habría que precisar cuidadosamente los costos de los arcos



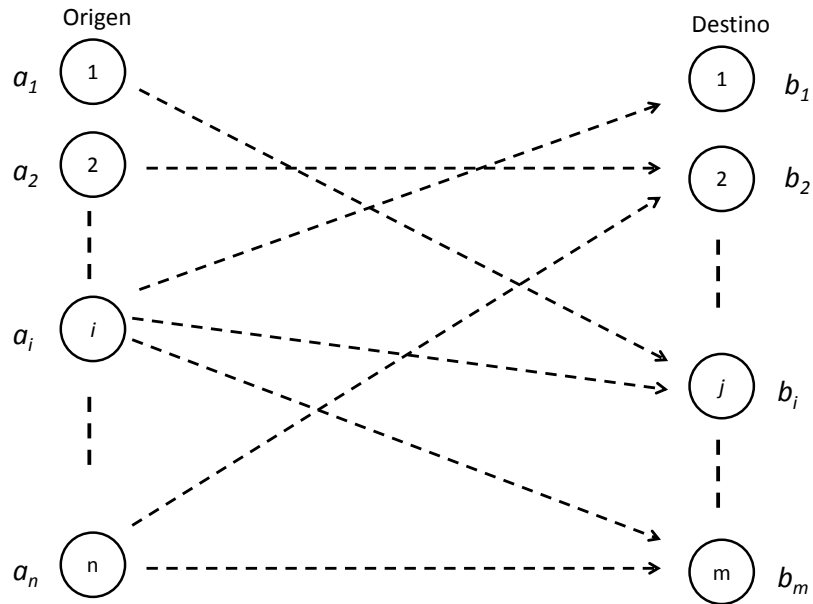


Figura 4.3: Problema de transporte. Hay  $nm$  arcos, que corresponden a las variables del problema.

ligados al nodo artificial. En el caso que esos costos sean nulos, los arcos ligados al nodo artificial pueden ser interpretados como variables de holgura. Otro supuesto es que las ofertas y demandas son números enteros, lo tendrá importancia en la resolución, como veremos más adelante.

Entonces, se define el problema de transporte como el de minimización de los costos totales de transporte de los flujos, los cuales satisfacen exactamente la oferta en cada nodo de origen y la demanda en cada nodo de destino. El problema se escribe:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{oferta}) \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{demanda}) \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

En este problema se considera que existen todos los arcos entre nodos de origen y nodos de

destino. Las restricciones quedan definidas de esa forma ya que, para los nodos de origen, las ecuaciones son del tipo (flujo saliente - flujo entrante = demanda):

$$\sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = a_i,$$

y, en este caso

$$\sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = 0.$$

Análogamente, en el caso de la demanda se tiene que

$$\sum_{k/(j,k) \in \mathcal{A}} x_{jk} - \sum_{k/(k,j) \in \mathcal{A}} x_{kj} = -b_j$$

y, en este caso

$$\sum_{k/(j,k) \in \mathcal{A}} x_{jk} = 0.$$

Podemos notar que el problema de asignación puede también ser interpretado como un caso particular del problema de transporte.

### 4.1.3. Problema de flujo máximo

Este problema es el de determinar el flujo máximo posible de un nodo origen o fuente ( $s$ ) dado a un nodo destino o sumidero ( $t$ ) con restricciones de capacidad en los arcos.

Si denotamos  $x_{ts}$  al flujo correspondiente a (devolver) transportar la cantidad final, desde  $t$  a  $s$ , notamos que  $max x_{ts}$  es equivalente a maximizar el flujo total transportado desde  $s$  a  $t$ , dado que el sistema se mantiene en equilibrio.

Luego, el problema se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{máx } & x_{ts} \\ & \sum_j x_{sj} - \sum_k x_{ks} - x_{ts} = 0 \quad (\text{balance en } s) \\ & \sum_j x_{tj} + x_{ts} - \sum_k x_{kt} = 0 \quad (\text{balance en } t) \\ & \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0 \quad i \neq s, t \quad (\text{balance entre nodos intermedios}) \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}' \end{aligned}$$

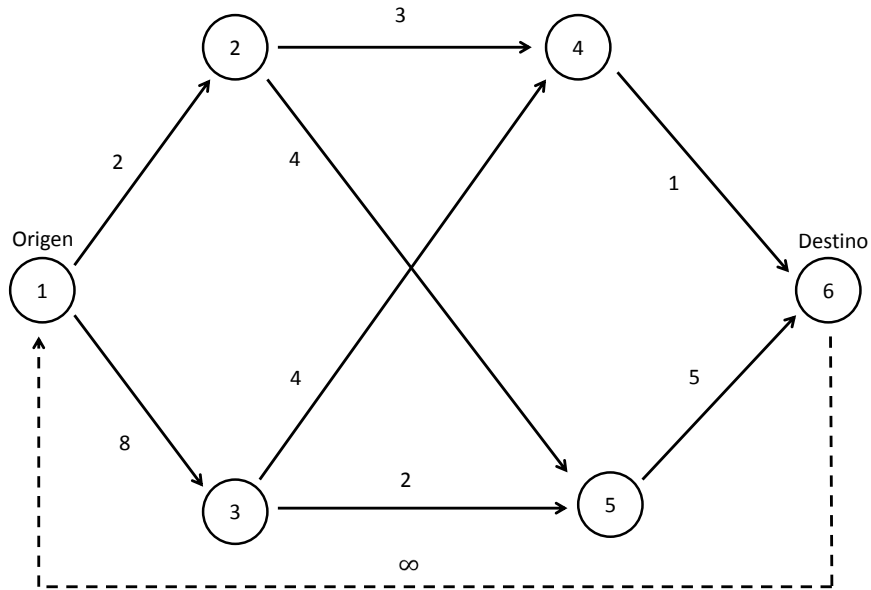


Figura 4.4: Problema de flujo máximo. Sobre los arcos se indica la capacidad.

donde  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(t, s)\}$ . Todas las sumas se extienden sobre los arcos existentes y se debe asignar capacidad  $u_{ts} = \infty$  al arco artificial  $(t, s)$ .

Si  $\mathcal{N}$  denota el conjunto de todos los nodos (incluidos  $s$  y  $t$ ), una forma más compacta de escribir este problema sería simplemente:

$$\begin{aligned} \text{máx } & x_{ts} \\ & \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}'} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}'} x_{ki} = 0 \quad i \in \mathcal{N} \text{ (balance en los nodos)} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}' \end{aligned}$$

Se puede advertir que si existe un camino orientado desde  $s$  a  $t$ , cuyos arcos tienen capacidad infinita, entonces el problema es no acotado.

#### 4.1.4. Problema de camino más corto

Este problema tiene como objetivo encontrar el camino más corto entre el nodo  $s$  y el nodo  $t$  en un grafo dado, es decir, encontrar una secuencia de arcos dirigidos y adyacentes entre  $s$

y  $t$ , de longitud mínima. La longitud del arco puede ser interpretada en términos de costo, tiempo, distancia, etc.

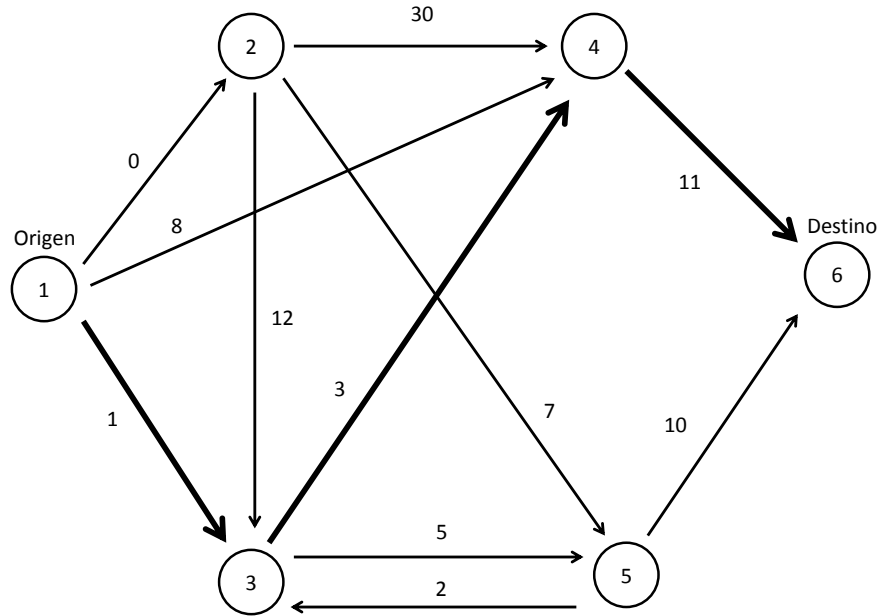


Figura 4.5: Problema de camino más corto. Sobre los arcos se indica la distancia o costo.

El problema se escribe

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_j x_{sj} &= 1 \quad (\text{nodo } s \text{ ofrece una unidad}) \\
 \sum_k x_{kt} &= 1 \quad (\text{nodo } t \text{ demanda una unidad}) \\
 \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} &= 0 \quad i \neq s, t \quad (\text{balance en nodos intermedios}) \\
 x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

Esta formulación se basa en que una unidad de producto viaja desde el nodo origen  $s$  al nodo destino  $t$ , de manera que al minimizar el costo total se está definiendo un camino de costo mínimo. El nodo origen es oferente y el nodo destino es demandante, siendo los restantes nodos de oferta (demanda) nula.

## 4.2. Resolución del problema de transporte

La resolución del problema de transporte será aquí abordada usando el algoritmo Simplex, adaptado a la estructura particular de este problema. Para esto, describiremos tres etapas del algoritmo, a saber:

- Obtener una solución básica factible inicial.
- Examinar si una solución básica factible es óptima.
- Modificar una solución básica factible (si no es óptima).

### 4.2.1. Obtener una solución básica factible inicial (Fase I)

El sistema de ecuaciones (restricciones) del problema de transporte es del tipo  $Ax = b$ , en que la matriz  $A$  es de orden  $(n+m) \times (nm)$  y tiene en cada columna un 1 en dos posiciones  $i$  y  $j$  (las que corresponden a los dos nodos, de origen y destino, asociados a la variable  $x_{ij}$ ) y el resto son ceros. Esto, porque cada arco es saliente desde un nodo y entrante en otro y por lo tanto no participa en las demás ecuaciones. Por esta razón, dado que se ha supuesto que la oferta total iguala a la demanda total, entonces el sistema tiene una ecuación redundante. Eso significa que las bases tendrán  $n + m - 1$  variables.

Se puede probar que las bases de este problema son **árboles**, es decir subgrafos de una estructura particular que definimos a continuación.

**Definición 4.2.1** *Un árbol es un grafo que satisface:*

- *Es conexo, es decir, existe una secuencia de arcos entre dos nodos cualesquiera (sin considerar la orientación de los arcos), y*
- *No contiene ciclos, es decir, partiendo de un nodo no se puede volver a él por una secuencia de arcos adyacentes (sin importar la orientación).*

Una forma simple de encontrar un árbol en un grafo correspondiente a un problema de transporte es el procedimiento de saturación que describiremos a continuación a través de un ejemplo. Consideremos tres nodos de oferta y cuatro nodos de demanda, dados por el grafo mostrado en la figura siguiente. Las ofertas y demandas son indicadas en el grafo y los costos unitarios de transporte están dados por la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 & 9 \\ 9 & 12 & 13 & 7 \\ 14 & 9 & 16 & 5 \end{bmatrix}$$

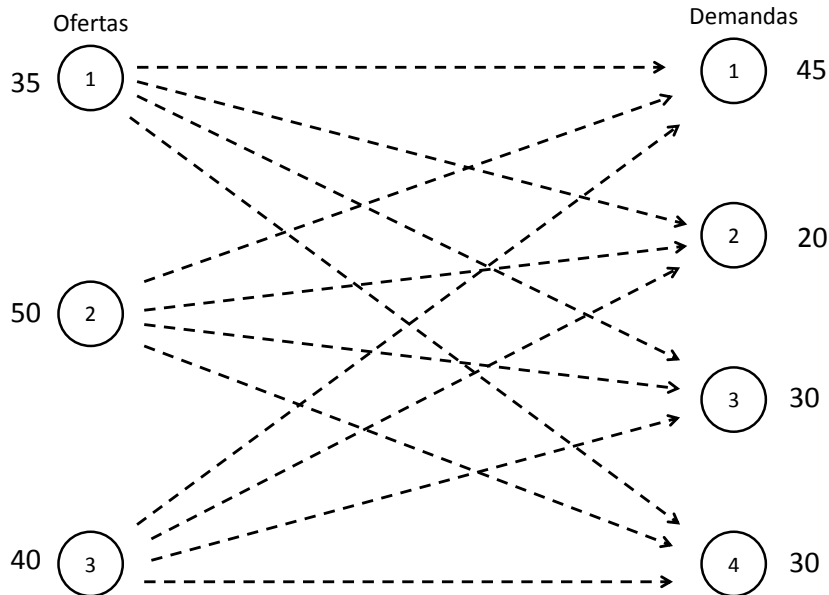


Figura 4.6: Ejemplo de problema de transporte.

**Procedimiento de saturación:** Como  $n + m$  es el número de nodos del grafo y dado que el sistema de ecuaciones (correspondiente a las restricciones de balance en los nodos) tiene una ecuación redundante, en la solución básica factible debe haber  $n + m - 1$  arcos con flujos positivos y los demás están en cero, es decir,  $nm - (n + m - 1)$  arcos son no básicos. Esto, pues las bases de este problema tienen  $n + m - 1$  arcos.

El método de saturación empieza cuando se satura el primer arco (elegido arbitrariamente), esto es, se elige un arco al cual se le asigna el máximo flujo posible, satisfaciendo así la demanda de los nodos demandantes, luego se prosigue de la misma manera con el resto de los arcos, hasta satisfacer la demanda de todos los nodos. Observemos el ejemplo, con 3 nodos-origen de ofertas 35, 50 y 40 respectivamente, y 4 nodos-destino con demandas 45,

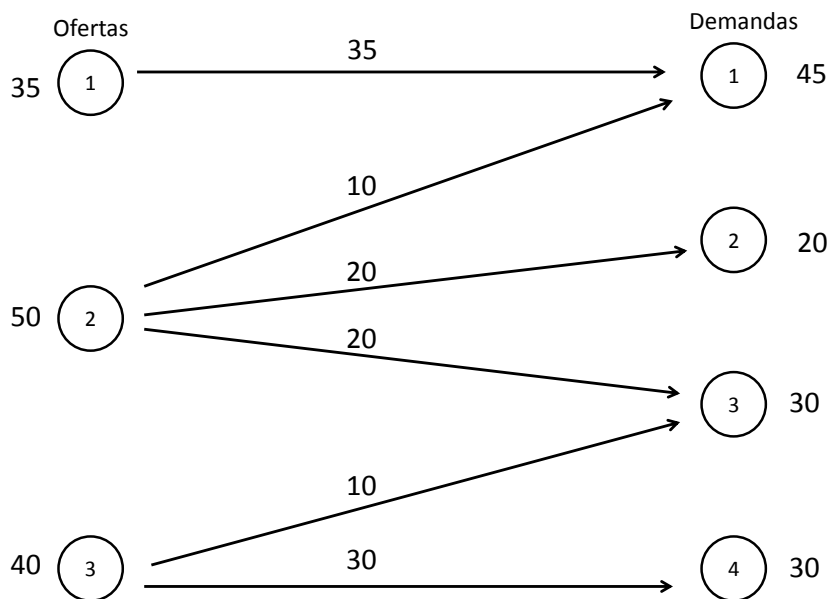


Figura 4.7: Procedimiento de saturación

20, 30 y 30. Al primer arco  $(1, 1)$  se asigna el flujo  $x_{11} = 35$ , que el máximo posible y corresponde a la oferta del nodo-origen 1. Eso quiere decir que el nodo-origen 1 queda saturado, en el sentido que ya entregó toda su oferta. El nodo-destino 1, que con esto tiene demanda residual igual a 10, puede ser saturado desde el nodo-origen 2, el cual queda con oferta residual igual a 40. Esas 40 unidades pueden ser trasladadas al nodo-destino 2, con lo cual el nodo-origen 2 queda saturado y el nodo-destino 2 tiene demanda residual cero. Este es un caso especial, puesto que se asigna entonces flujo de valor cero al arco  $(3, 2)$ . Repitiendo el procedimiento, el nodo-origen 3 entrega 10 unidades al nodo-destino 3 y 30 al nodo-destino 4.

Notar que este procedimiento produce una solución factible que corresponde a una base, pues el grafo así generado es un árbol de 6 arcos (esto es  $3+4-1$ ). Además se puede generar distintas bases factibles cambiando el orden de saturación. En el ejemplo se usó el orden correlativo de los nodos de origen y destino, pero bastaría con reordenarlos para que este procedimiento generara una base distinta.

Por otro lado, podemos calcular el costo total asociado a esta solución, el cual resulta ser  $z = 1180$ .

**Procedimiento de saturación a costo mínimo.** Como hemos dicho, el orden de saturación es irrelevante, de manera que podemos ir haciendo entrar los arcos a la base, de acuerdo a los costos de estos, buscando producir una solución de bajo costo esperado. Entonces ahora saturamos siguiendo en cada paso el costo mínimo, es decir, comenzamos saturando desde el arco que posee el menor costo al de mayor costo. Este procedimiento también produce un árbol o solución básica factible.

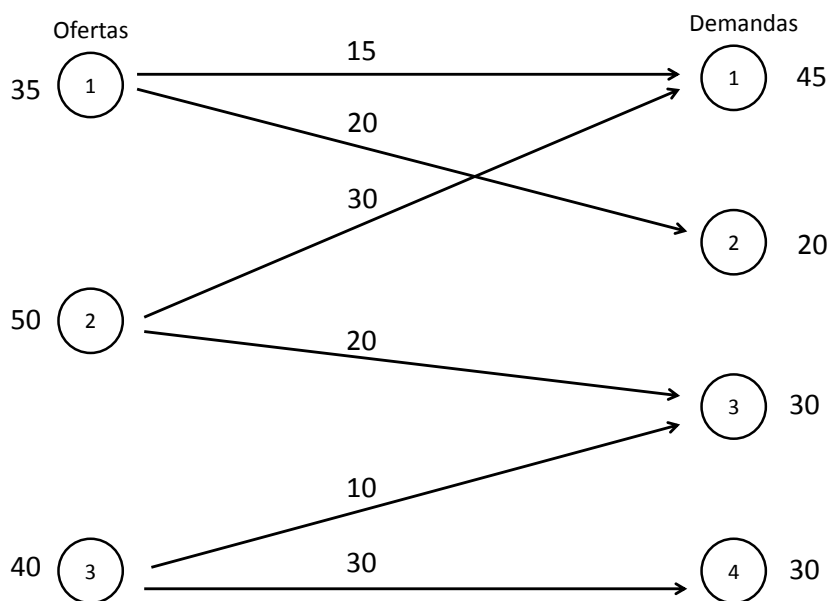


Figura 4.8: Procedimiento de saturación a costo mínimo

En el ejemplo, el arco de costo más bajo es el arco  $(3, 4)$ , de manera que saturamos  $x_{34} = 30$  y este valor de flujo se resta de los dos nodos involucrados, lo cual hace que la demanda del nodo se anula y la oferta del nodo 1 se rebaja a 10. Como el nodo destino 4 satisface su demanda, entonces es eliminado del proceso lo cual significa que se procede a eliminar todos los arcos incidentes en él. De los restantes arcos, el de mínimo costo es  $(1, 2)$ , y se debe saturar entonces  $x_{12} = 20$ , quedando la oferta del nodo 1 en valor 15 y la demanda del nodo 2 en valor 0. Se procede a eliminar ahora del proceso al nodo destino 2.

Siguiendo de esta forma se llega a una base (árbol) que consta de los arcos  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 3)$  y  $(3, 4)$ , cuyo valor de función objetivo es  $z = 1080$ . Notar que es algo menor que el valor de la solución anterior, obtenida por el proceso de saturación simple, pero esto no corresponde a una propiedad sino más bien a una simple casualidad.



## 4.2.2. Examinar si una solución básica factible es óptima

Notemos que, si los datos  $a_i, b_j$  son enteros, entonces los flujos  $x_{ij}$  son también enteros (de acuerdo al procedimiento de saturación que hemos descrito). Más aún, si tanto las ofertas como demandas son enteras, entonces todos los puntos extremos del problema de transporte tienen coordenadas enteras. Por esta razón, el problema de transporte es del tipo canónico

$$\begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ Ax &= d \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

en el cual no se impone la condición de integridad de las variables de manera explícita. Notar que el vector  $d$  está dado por una columna que concatena los vectores  $a = (a_i)$  y  $b = (b_j)$ .

Las restricciones son de dos tipos: de oferta ( $n$ ) y de demanda ( $m$ ). Es decir, hay dos tipos de variables duales, que llamaremos  $u_i$  y  $v_j$ , asociadas respectivamente a los nodos de origen y de destino. Entonces el problema dual se puede escribir

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx } & \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{j=1}^m b_j v_j \\ & u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

dado que en cada columna de la matriz  $A$  hay solamente dos coeficientes iguales a 1 y los restantes son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

En cada columna de  $A$  existe un valor 1 entre las posiciones 1 a  $n$  y otro 1 entre las posiciones  $n+1$  a  $n+m$ , siendo nulos todos los coeficientes restantes. Supongamos entonces que tenemos una solución básica factible (una solución factible con estructura de árbol, tal como la última, generada por la saturación a costo más bajo). Los costos reducidos para las variables básicas están dados por

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - \pi^T B = 0$$

en que  $\pi^T = (u^T, v^T)$  es el vector de variables duales. De allí, dado que la matriz  $B$  tiene la misma estructura que  $A$  (puesto que  $B$  es una submatriz cuadrada de  $A$ ), entonces de la

ecuación anterior se tiene

$$(\alpha) \bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = 0 \quad \text{para todo arco básico}$$

Análogamente, los costos reducidos para las variables no básicas son

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N,$$

lo que implica

$$(\beta) \bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad \text{para todo arco no básico}$$

El conjunto de ecuaciones  $(\alpha)$  representa un sistema de  $m + n - 1$  ecuaciones y  $m + n$  incógnitas y la matriz de ese sistema  $(\alpha)$  es de rango  $m + n - 1$ . Entonces podemos fijar una variable dual (cualquiera) en un valor arbitrario y usar  $(\alpha)$  para encontrar todas las restantes variables duales (eso es posible, dado que el sistema recorre un árbol, en el cual en cada paso se puede despejar una variable  $u_i$  o  $v_j$ ). En este ejemplo (puede ser cualquier variable y en cualquier valor real), fijamos  $u_1 = 0$ , lo que implica que  $v_1 = 8$  y los valores de las demás variables duales quedan determinadas así:

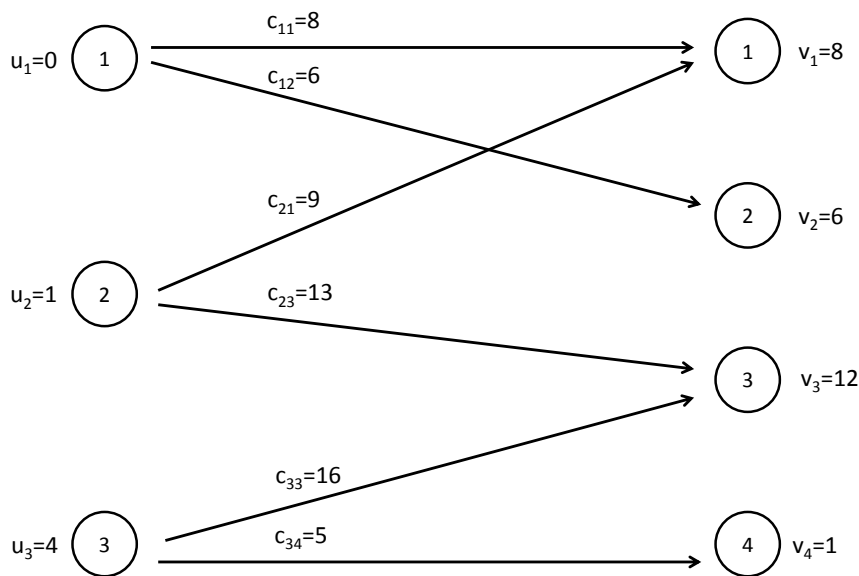


Figura 4.9: Procedimiento de determinación de variables duales

Con estos valores es posible determinar los costos reducidos de los arcos no básicos, usando las ecuaciones  $(\beta)$ , de manera de decidir si alguno puede entrar a la base (costo reducido

negativo). Esto es

$$\bar{c}_{13} = -2 \quad \bar{c}_{14} = 8 \quad \bar{c}_{22} = 5 \quad \bar{c}_{24} = 5 \quad \bar{c}_{31} = 2 \quad \bar{c}_{32} = -1$$

Es sabido que si  $\bar{c}_{ij} \geq 0$ , para todo arco no básico, entonces la solución en curso es óptima. En este caso eso no es cierto y se observa que dos arcos pueden entrar a la base, mejorando el valor de la función objetivo. En la sección siguiente mostraremos cómo iterar para realizar el cambio de base.

### 4.2.3. Modificar una solución básica factible (si no es óptima)

Decidimos ingresar la variable  $x_{13}$  a la base, es decir aumentaremos el flujo de ese arco hasta la saturación, de manera de mantener factibilidad. Naturalmente, al aumentar el flujo en ese arco, se deben modificar los flujos de los arcos del ciclo que la introducción del propio arco genera en el árbol básico, tal como se muestra en el grafo.

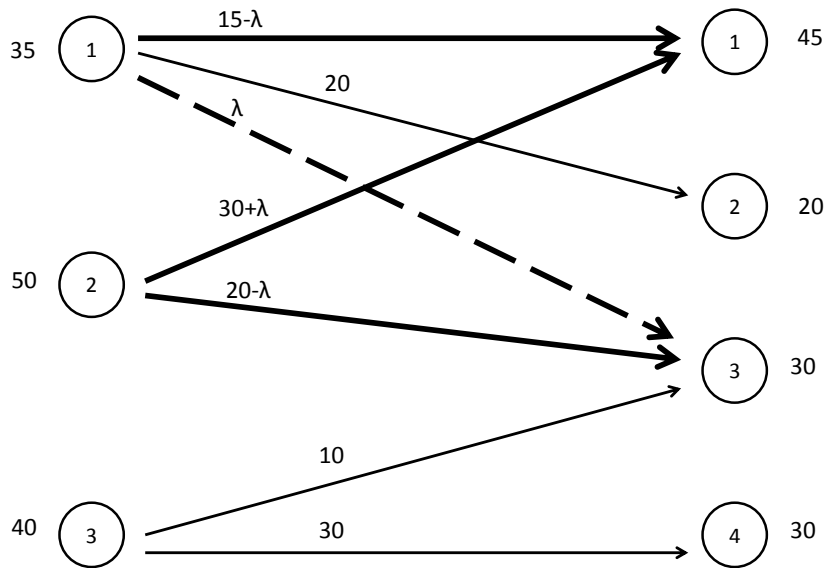


Figura 4.10: Aumento del flujo en arco que entra a la base.

Las condiciones de factibilidad que debe cumplir el valor  $\lambda$  solamente se deben imponer en los arcos del ciclo que el arco ingresado genera, tal como se indica en la figura. Entonces, se

impone:

$$\begin{aligned} 15 - \lambda &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ 30 + \lambda &\geq 0 \\ 20 - \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

lo que implica que  $0 \leq \lambda \leq 15$ . El mayor decrecimiento de la función objetivo se obtiene con  $\lambda = 15$ , lo cual implica que la variable (arco)  $x_{11}$  se anula y sale de la base (si hay más de una arco que se anula al maximizar  $\lambda$ , entonces solamente uno de ellos debe salir de la base, quedando los demás en la base con valor de flujo igual a cero). En nuestro ejemplo, la nueva solución básica está dada por el grafo siguiente, con valor de la función objetivo  $z = 1050$ .

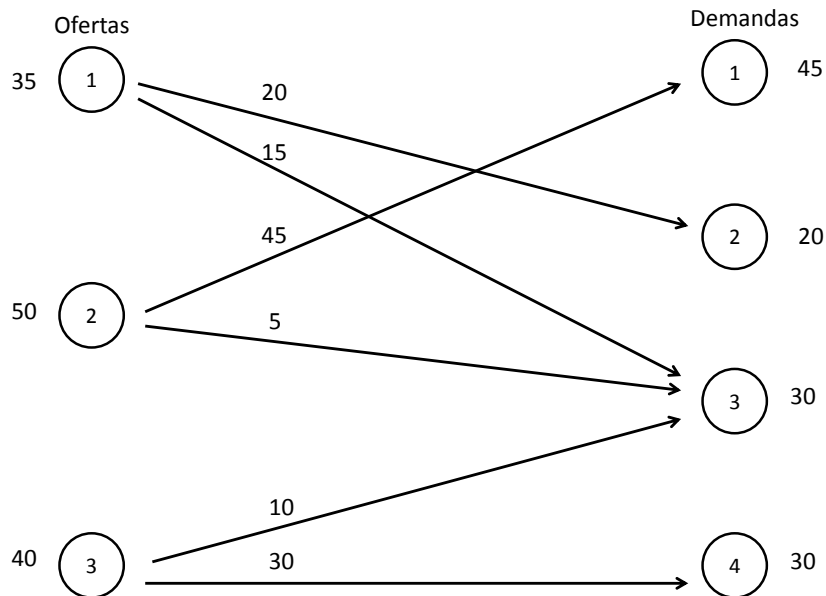


Figura 4.11: Nueva solución básica.

Este procedimiento se puede entonces reiterar, realizando de nuevo los cálculos mostrados en la sección anterior, hasta que todos los costos reducidos sean mayores o iguales a cero.

### 4.3. Flujo de costo mínimo: mejoramiento de una solución en curso

En esta sección trataremos el problema de cómo verificar optimalidad de una solución básica factible y cómo mejorarla, para el problema general de flujo de costo mínimo. Lo que haremos será esencialmente extender los conceptos introducidos en las secciones anteriores sobre el problema de transporte. No trataremos aquí el problema de encontrar una solución básica factible inicial (o fase I), sino que supondremos que ella es conocida.

Consideremos de nuevo el problema del ejemplo introductorio de este capítulo:

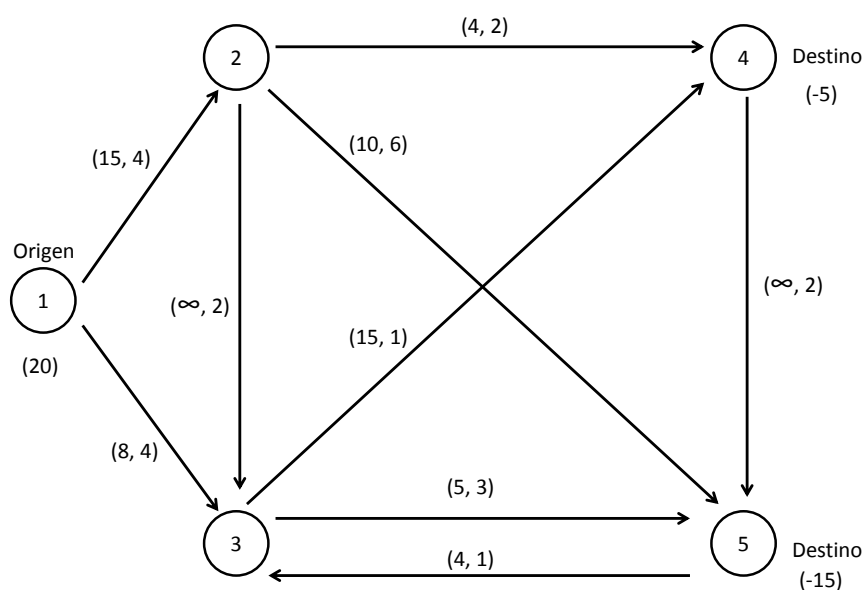


Figura 4.12: Problema de flujo de costo mínimo.

Como hemos visto, este problema se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (FCM) \quad \text{mín} \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j/(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = b_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

pero, en este ejemplo, usamos  $l_{ij} = 0$  para todos los arcos. En este caso, tampoco imponemos de manera explícita la integridad de las variables de flujo (en el caso de ofertas y demandas enteras), pues las bases factibles son también árboles.

Sean  $n$  el número de nodos de la red y  $m = \#\mathcal{A}$ , el número de arcos. La matriz del grafo es de  $n \times m$  y las bases están compuestas por  $n - 1$  arcos, como en el caso del ejemplo, mostrado en el grafo más abajo. Los arcos no dibujados se entienden de flujo nulo. La base

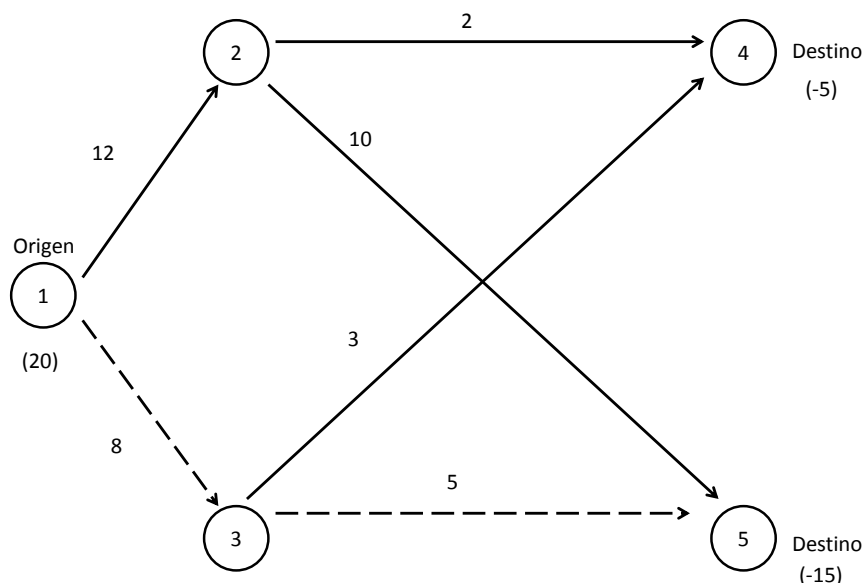


Figura 4.13: Base del problema de flujo. Los valores de los flujos están indicados en los arcos.

indicada está compuesta por 4 arcos:  $\{(1, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$ . Los arcos  $(1, 3)$  y  $(3, 5)$  no son básicos, pero tampoco tienen flujo nulo. Extenderemos ahora el concepto de base al caso de la programación lineal con cotas, que es el caso del problema de flujo de costo mínimo.

**Extensión del concepto de base.** Consideremos el problema escrito en la forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

donde  $l$  y  $u$  son vectores. En el caso del problema de flujo que estamos considerando,  $A$  es del orden  $n \times m$  y de rango filas completo, eventualmente, en el caso de un problema de

flujo, eliminando una fila redundante. Se define entonces la base de la manera siguiente: sea  $A = [B, N]$  una descomposición de la matriz de restricciones y sean las variables  $x_B$  y  $x_N$  las coordenadas correspondientes de la variable  $x$ . Igualmente, consideremos las particiones correspondientes para las cotas y el vector de costos:  $l_B, l_N, u_B, u_N, c_B$  y  $c_N$ .

Una variable **no básica** es aquella fijada en alguna de sus cotas y las **variables básicas** se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones (respetando sus cotas). Entonces:

- $x_{N_i} = l_{N_i} \vee u_{N_i}$
- $l_B \leq x_B \leq u_B$ , donde  $Bx_B = b - Nx_N$

En el caso del problema de flujo del ejemplo los arcos (1, 3) y (3, 5) son no básicos y están en su cota superior. De manera análoga al caso del problema de transporte, los costos reducidos se pueden determinar usando usando el hecho que

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - \pi^T B = 0,$$

en que  $\pi^T$  es el vector de variables duales y, dada la estructura de la matriz  $B$  en este caso, se tiene que

$$(\alpha') \quad c_{ij} = \pi_i - \pi_j \quad \text{para todo arco básico.}$$

Análogamente, los costos reducidos para las variables no básicas son

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N,$$

lo que implica

$$(\beta') \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - (\pi_i - \pi_j) \quad \text{para todo arco no básico.}$$

**Condición de optimalidad.** Se dice que la solución en curso es óptima si se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &\geq 0 && \text{si } l_{ij} = x_{ij} && \text{(en cota inferior)} \\ \bar{c}_{ij} &= 0 && \text{si } l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \\ \bar{c}_{ij} &\leq 0 && \text{si } x_{ij} = u_{ij} && \text{(en cota superior)} \end{aligned}$$

Las ecuaciones  $(\alpha')$ , para las variables básicas, permiten determinar los valores de las variables duales. Dado que hay  $n$  nodos y  $n - 1$  arcos básicos, basta fijar arbitrariamente el valor de una variable dual. Para el caso del ejemplo, fijemos  $\pi_2 = 0$ , de donde se obtiene:

$$\pi^T = (4, 0, -1, -2, -6)$$

Luego, se calculan los costos reducidos de los arcos no básicos mediante  $(\beta')$ , de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= c_{13} - (\pi_1 - \pi_3) = -1 \\
\bar{c}_{23} &= c_{23} - (\pi_2 - \pi_3) = 1 \\
\bar{c}_{35} &= c_{35} - (\pi_3 - \pi_5) = -2 \\
\bar{c}_{45} &= c_{45} - (\pi_4 - \pi_5) = -2 \\
\bar{c}_{53} &= c_{53} - (\pi_5 - \pi_3) = 6
\end{aligned}$$

**Regla de entrada a la base.** Son candidatos para ingresar a la base:

- Arcos no básicos de costo reducido negativo que están en su cota inferior.
- Arcos no básicos de costo reducido positivo que están en su cota superior.

En este caso, solamente el flujo  $x_{45}$  puede entrar a la base, pues está en su cota inferior (cero) y tiene costo reducido negativo ( $\bar{c}_{45} = -2$ ).

Los arcos del ciclo que se forma son  $(4, 5)$ ,  $(2, 5)$  y  $(2, 4)$ . Sea  $\lambda$  el máximo flujo del arco  $(4, 5)$ . Por factibilidad, respectivamente, se debe cumplir:

$$\begin{array}{ll}
\text{arco } (4, 5) & 0 \leq \lambda \\
\text{arco } (2, 5) & 0 \leq 10 - \lambda \leq 10 \\
\text{arco } (2, 4) & 0 \leq 2 + \lambda \leq 4
\end{array}$$

de manera que  $0 \leq \lambda \leq 2$ , lo que implica que el arco  $(2, 4)$  sale de la base (alcanza su cota superior) y se genera una nueva solución básica, que consta de las variables  $x_{12}$ ,  $x_{25}$ ,  $x_{34}$  y  $x_{45}$ . Este proceso se puede entonces repetir, de manera de verificar si esta solución es óptima y, si no lo es, mejorarla de la misma manera aquí mostrada.

Notar que el valor del flujo ( $\lambda$ ) que entra a la base se considera siempre positivo, pero si se tratara de un arco que está fuera de la base, pero en su cota superior, este valor debería ser restado a ese flujo. Se procede en consecuencia en los demás arcos del ciclo generado por ese arco.

A modo de ejercicio, se sugiere continuar el procedimiento hasta la optimalidad, indicando en cada iteración el valor de la función objetivo.



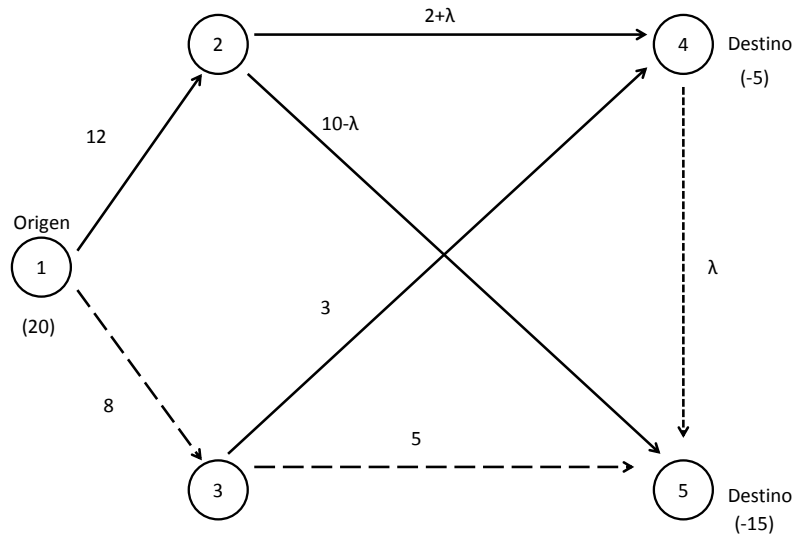


Figura 4.14: Ciclo generado por la variable que entra a la base.

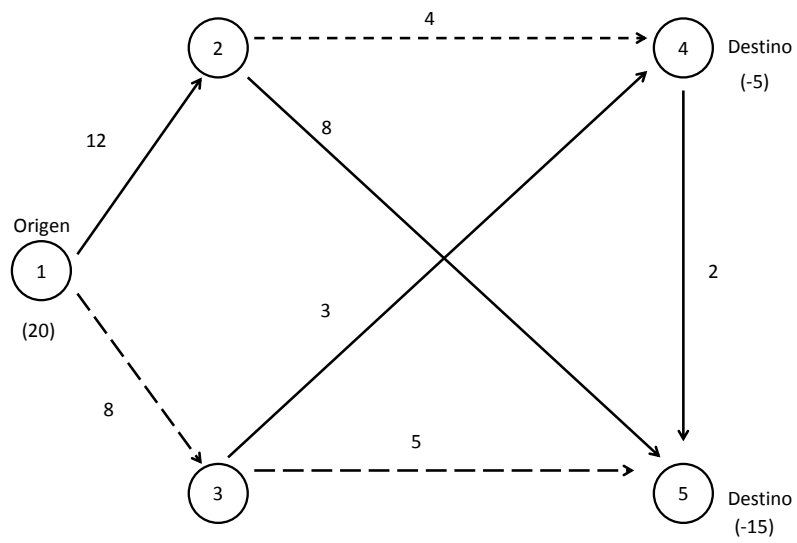


Figura 4.15: Nueva solución básica factible.

# Capítulo 5

## Caracterización de optimalidad

### 5.1. El problema de optimización no lineal

En este capítulo trataremos el problema:

$$(P) \min_{x \in S} f(x)$$

Con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , generalmente definido por ecuaciones no necesariamente lineales, que llamaremos *región factible* y  $f$  una función cualquiera. Ciertamente, si  $S$  es un poliedro y  $f$  es lineal entonces se trata del caso de la programación lineal.

**Definición 5.1.1** *Un punto  $x^* \in S$  se dirá **mínimo local** de  $f$  si existe  $\epsilon > 0$  que cumpla  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in S$  tal que  $\|x^* - x\| < \epsilon$ . Es decir, existe una vecindad de  $x^*$  donde dicho punto es mínimo.*

**Definición 5.1.2** *Un punto  $x^* \in S$  se dirá **mínimo global** de  $f$  en  $S$  si  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in S$ . Es decir,  $x^*$  es solución de  $(P)$ .*

En términos del lenguaje utilizado, un elemento  $\bar{x} \in S$  se llama **solución factible** de  $(P)$  y si  $\bar{x}$  resuelve  $(P)$  se puede decir que es **solución**, **solución óptima**, **mínimo**, o **solución global** del problema.

## 5.2. Funciones convexas

**Definición 5.2.1** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Se dice que  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Esta definición se puede interpretar geoméricamente, diciendo que la imagen por  $f$  del segmento  $[x, y]$  queda por debajo de la recta que une  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  (ver Figura 5.1).

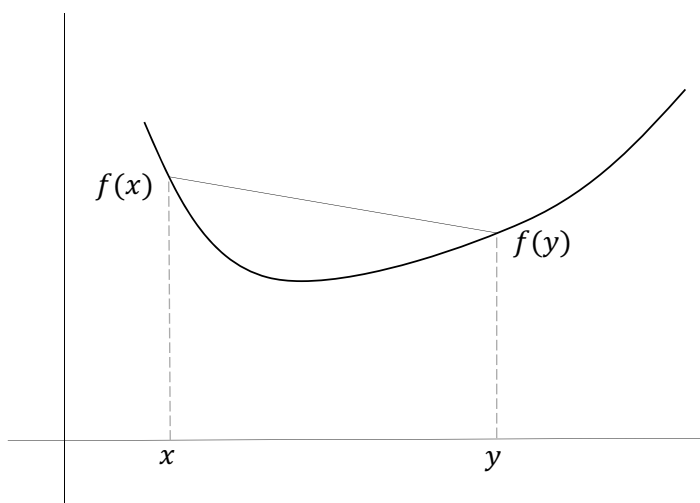


Figura 5.1: Función convexa: imagen del segmento  $[x, y]$  queda por debajo de la recta que une los puntos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ .

Es posible probar la siguiente proposición, que induce una definición equivalente de convexidad de funciones.

**Proposición 5.2.1** Una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es **convexa** si y sólo si  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in S$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  tales que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , se tiene

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k).$$

**Definición 5.2.2** Una función  $f$ , definida sobre un convexo  $S$ , se dice **estrictamente convexa** si para todo  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$ ,  $0 < \lambda < 1$ , se tiene

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

**Definición 5.2.3** Se dice que  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es **cóncava** si  $-f$  es convexa o, equivalentemente, si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Del mismo modo,  $f$  es **estrictamente cóncava** si  $-f$  es estrictamente convexa.

**Ejemplo 5.2.1** .

i) Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \alpha^T x + \beta$  (lineal afín) es cóncava y convexa.

ii) La función  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ 0 & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ x & \text{si } x \in [1, \infty[ \end{cases}$$

(lineal por pedazos) no es convexa ni cóncava.

iii) La función  $f(x) = -x^2$  es estrictamente cóncava.

iv) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in ]-\infty, 2] \\ 4 & \text{si } x \in ]2, \infty[ \end{cases}$$

no es convexa ni cóncava.

A continuación presentamos el teorema que garantiza la continuidad de las funciones convexas en el interior de su dominio. La demostración es un buen ejercicio de cálculo en varias variables.

**Teorema 5.2.1** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Entonces,  $f$  es continua en el interior de  $S$ .

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ . Para probar la continuidad de  $f$  en  $\bar{x}$  necesitamos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$ .

Sea entonces  $\varepsilon > 0$ . Dado que  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  existe  $\eta > 0$  tal que la bola de centro  $\bar{x}$  y radio  $\eta$  está incluida en  $S$ , es decir,  $B(\bar{x}, \eta) \subseteq S$ .

Claramente  $\bar{x} \pm \eta e_i \in S$ , con  $e_i$  vector de la base canónica. Luego, es claro que

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \eta e_i) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \eta e_i)$$

y esto implica (por convexidad de  $f$ )

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{2}f(\bar{x} + \eta e_i) + \frac{1}{2}f(\bar{x} - \eta e_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

de donde

$$0 \leq \frac{1}{2}\{f(\bar{x} + \eta e_i) - f(\bar{x})\} + \frac{1}{2}\{f(\bar{x} - \eta e_i) - f(\bar{x})\}.$$

De aquí se desprende que  $\forall i$ ,  $f(\bar{x} + \eta e_i) - f(\bar{x})$  y  $f(\bar{x} - \eta e_i) - f(\bar{x})$  no pueden ser simultáneamente negativos.

Sea  $K = \max\{f(\bar{x} \pm \eta e_i) - f(\bar{x}), \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $0 \leq K < \infty$ , y definamos  $\delta = \min\{\frac{\eta}{n}, \frac{\varepsilon \eta}{nK}\}$ .

Sean  $\alpha_i \geq 0$   $i = 1, \dots, n$ , tales que  $x - \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$ , con

$$d_i = \begin{cases} \eta e_i & \text{si } x_i - \bar{x}_i \geq 0 \\ -\eta e_i & \text{si } x_i - \bar{x}_i < 0 \end{cases}$$

Luego,  $\|x - \bar{x}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j d_i d_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|d_i\|^2 = \eta^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \delta^2$ .

Así, se tiene que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \frac{\delta^2}{\eta^2} = \min\{\frac{1}{n^2}, \frac{\varepsilon^2}{n^2 K^2}\}$ , lo que implica en particular que

$$\alpha_i \leq \min\{\frac{1}{n}, \frac{\varepsilon}{nK}\} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x - \bar{x} + \bar{x}) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + \bar{x}\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(n\alpha_i d_i + \bar{x})\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(n\alpha_i d_i + \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[(1 - n\alpha_i)\bar{x} + n\alpha_i(\bar{x} + d_i)] \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1 - n\alpha_i)f(\bar{x}) + n\alpha_i f(\bar{x} + d_i)] \\
&= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + d_i) - f(\bar{x})]
\end{aligned}$$

Luego (de la definición de  $K$  y por la cota establecida para  $\alpha_i$  más arriba),

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(\bar{x} + d_i) - f(\bar{x})] \leq K \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \varepsilon$$

Para terminar, falta probar que  $f(\bar{x}) - f(x) \leq \varepsilon$ .

Sea  $y = 2\bar{x} - x$ . Notemos que  $\|y - \bar{x}\| = \|\bar{x} - x\| \leq \delta$ , luego,  $f(y) - f(\bar{x}) \leq \varepsilon$ .

Pero  $f(\bar{x}) = f(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x)$  implica que

$$\frac{1}{2}[f(\bar{x}) - f(x)] \leq \frac{1}{2}[f(y) - f(\bar{x})] \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Luego,  $|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$  y se tiene el resultado. ■

Una función convexa podría no ser continua en todo su dominio, sin embargo, el teorema anterior dice que los puntos de discontinuidad se encuentran en la frontera, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.2.2** Sea  $S = \{x/|x| \leq 1\}$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| = 1 \end{cases}$

La función  $f$  es convexa, continua en  $\text{int}(S)$  y los puntos de discontinuidad  $\{-1, 1\}$  están en la frontera de  $S$ .

### 5.2.1. Conjuntos relevantes asociados a funciones convexas

**Definición 5.2.4** Sea  $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S \neq \emptyset$  un conjunto cualquiera. Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  se definen los siguientes conjuntos (ver Figura 5.2)

- $N_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$ , el **conjunto de nivel**  $\alpha$ .
- $C_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = \alpha\}$ , **curva de nivel**  $\alpha$ .
- $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} / f(x) \leq \alpha\}$ , el **epígrafo** de  $f$ .

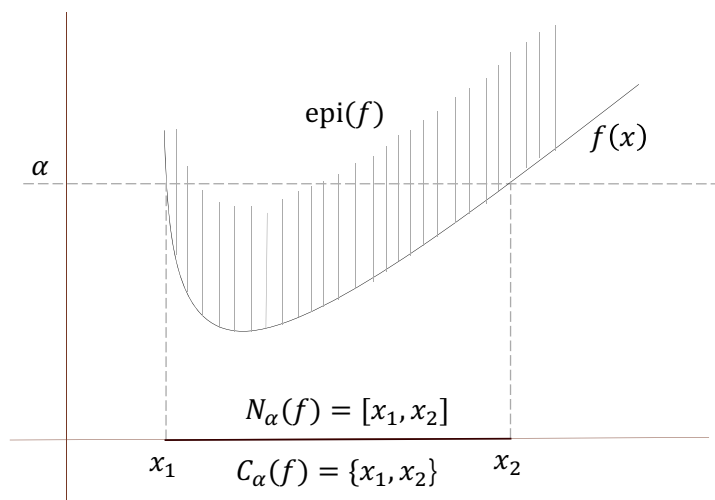


Figura 5.2: Conjunto de nivel, curva de nivel y epígrafo de una función real  $f$ .

**Teorema 5.2.2** Sea una función  $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  convexo. Se tiene que

- (i)  $f$  es convexa si y sólo si  $\text{epi}(f)$  es un conjunto convexo
- (ii) Si  $f$  es convexa, entonces  $N_\alpha(f)$  es convexo.

### **Demostación.**

(i) Sea  $f$  convexa. Sean  $(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi}(f) \subseteq S \times \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces, por convexidad de  $S \times \mathbb{R}$  se tiene

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) \in S \times \mathbb{R}$$

Por otro lado, como  $f$  es convexa,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta,$$

puesto que  $f(x) \leq \alpha$  y  $f(y) \leq \beta$ . Luego,

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) \in \text{epi}(f)$$

es decir

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) \in \text{epi}(f),$$

por lo tanto  $\text{epi}(f)$  es convexo.

Sea ahora  $\text{epi}(f)$  un conjunto convexo. Claramente se tiene que  $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi}(f)$  y, por lo tanto, para  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene

$$\lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(y, f(y)) \in \text{epi}(f).$$

Es decir,

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \in \text{epi}(f),$$

lo que significa que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

y se concluye que  $f$  es convexa.

(ii) Sean  $x, y \in N_\alpha(f)$ . Se tiene que  $f(x) \leq \alpha$  y  $f(y) \leq \alpha$ , por lo tanto

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \alpha$$

de donde  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in N_\alpha(f)$ . ■

La recíproca de (ii) no es cierta: para la función (iv) del Ejemplo 5.2.1,  $N_\alpha(f)$  es convexo  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , sin embargo la función no es convexa.

**Teorema 5.2.3** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S$  convexo no vacío, y sea  $\bar{x}$  una solución local del problema (P). Entonces,



(i) Si  $f$  es convexa,  $\bar{x}$  es mínimo global.

(ii) Si  $f$  es estrictamente convexa,  $\bar{x}$  es el único mínimo global.

### **Demostración.**

(i) Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in V_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in S / \|\bar{x} - x\| < \varepsilon\}$  y supongamos que  $\bar{x}$  no es óptimo global.

Es decir, existe  $y \in S$  tal que  $f(y) < f(\bar{x})$ . Luego, para  $\lambda \in ]0, 1[$ ,

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Para  $\lambda$  suficientemente pequeño (en realidad basta con elegir  $\lambda < \frac{\varepsilon}{\|y - \bar{x}\|}$ ), se tiene que  $\lambda y + (1 - \lambda)\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{x})$  y  $f(\lambda y + (1 - \lambda)\bar{x}) < f(\bar{x})$ , lo cual es una contradicción pues  $\bar{x}$  es mínimo local en  $V_\varepsilon(\bar{x})$ .

(ii) Como  $f$  estrictamente convexa entonces  $f$  es convexa. Luego, por (i),  $\bar{x}$  es mínimo global.

Supongamos que no es único, esto es, que existe  $y \in S$ , con  $y \neq \bar{x}$ , tal que  $f(y) = f(\bar{x})$ . Entonces

$$f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{x}\right) < \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

lo que implica que existe  $z \in S$ ,  $z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{x}$ , distinto de  $\bar{x}$ , tal que  $f(z) < f(\bar{x})$ . Esto contradice el hecho que  $\bar{x}$  es mínimo global. ■

## **5.2.2. Funciones convexas diferenciables**

**Definición 5.2.5** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in S$ ,  $y \neq 0$  tal que

$$\bar{x} + \lambda y \in S \quad \forall \lambda \in [0, \eta[, \text{ algún } \eta > 0.$$

Se define la **derivada direccional** de  $f$  en el punto  $\bar{x}$ , en la dirección  $y$ , por (cuando el límite existe)

$$f'(\bar{x}, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda y) - f(\bar{x})}{\lambda} \in \bar{\mathbb{R}}$$

donde  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

**Definición 5.2.6** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío. Una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **diferenciable** en  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  si existe  $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

donde  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$ .

**Teorema 5.2.4** Si  $f$  es diferenciable en el interior de  $S$ , entonces  $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$ .

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , como  $f$  es diferenciable se tiene que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S.$$

Sea  $x = \bar{x} + \lambda d \in S$  (para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño), luego

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (\lambda d) + o(\lambda d)$$

implica

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} = \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(\lambda d)}{\|\lambda d\|} \|d\|$$

Tomando límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , se obtiene  $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$ . ■

La siguiente proposición garantiza la existencia de la derivada direccional de las funciones convexas (bajo ciertas hipótesis generales).

**Proposición 5.2.2** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa. Sean  $\bar{x} \in S$ , y  $d \neq 0$  tales que existe  $\eta > 0$  que cumple  $\bar{x} + \lambda d \in S$ , para todo  $\lambda \in [0, \eta[$ . Entonces  $f'(\bar{x}, d)$  existe.

**Demostración.** Sean  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \eta$ . Entonces

$$f(\bar{x} + \lambda_1 d) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\bar{x}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) f(\bar{x})$$

implica

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda_1 d) - f(\bar{x})}{\lambda_1} \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda_2 d) - f(\bar{x})}{\lambda_2}$$

Así, la función  $\varphi(\lambda) = \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$  es monótona (no decreciente) y por lo tanto  $\inf_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$  existe (estamos en  $\bar{\mathbb{R}}$ ).

Pero  $\inf_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi(\lambda) = f'(\bar{x}, d)$ , luego la derivada direccional existe. ■

El teorema siguiente permite caracterizar la convexidad de las funciones diferenciables, estableciendo que el hiperplano soportante de la función, en un punto cualquiera de la frontera del epígrafo, acota inferiormente a la función.

**Teorema 5.2.5** (*Caracterización de convexidad en el caso diferenciable*) Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , convexo. Entonces  $f$  es convexa si y sólo si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Sea  $f$  convexa. Dados  $x, \bar{x} \in S$  se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Reordenando, tenemos que

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\lambda} \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in [0, 1[$$

y tomando límite  $\lambda \rightarrow 0^+$  :

$$f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x})$$

que implica

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad \forall \bar{x}, x \in S.$$

( $\Leftarrow$ ) Sean  $x, \bar{x} \in S$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}), (1 - \lambda)(x - \bar{x}) \rangle \quad \forall \lambda \in [0, 1] \\ f(\bar{x}) &\geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}), \lambda(\bar{x} - x) \rangle \quad \forall \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

Multiplicando la primera desigualdad por  $\lambda$ , la segunda por  $(1 - \lambda)$  y sumando, se tiene

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Es decir,  $f$  es convexa. ■

**Observación 5.2.1** Es directo probar que  $f$ , satisfaciendo las hipótesis del teorema anterior, es estrictamente convexa si y sólo si  $f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$ ,  $\forall x, \bar{x} \in S$ ,  $x \neq \bar{x}$ .

**Observación 5.2.2** La notación  $\langle u, v \rangle$  representa el producto interno canónico en  $\mathbb{R}^n$ , es decir  $\langle u, v \rangle = u^T v$ , si interpretamos los vectores como columnas.

**Corolario 5.2.1** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , convexo. Entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$ ,  $\forall x_1, x_2 \in S$ .

**Demostración.** De acuerdo al teorema anterior,

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_2) + \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle & \forall x_1, x_2 \in S \\ f(x_2) &\geq f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle & \forall x_1, x_2 \in S \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores, se tiene que

$$0 \geq \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2 \rangle + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle = \langle -\nabla f(x_2) + \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle$$

es decir,  $\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in S$ . ■

**Definición 5.2.7** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío. Una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **dos veces diferenciable** en  $\bar{x}$  si existe  $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$  y  $H(\bar{x}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

donde  $\frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow \bar{x}$

La matriz  $H(\bar{x})$  se llama **matriz Hessiana** de  $f$  en  $\bar{x}$ :

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

**Teorema 5.2.6** (*Caracterización de convexidad para una función dos veces diferenciable*)  
 Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, convexo, no vacío, y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable en  $S$ .  
 Entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $H(x)$  es semi-definida positiva  $\forall x \in S$ .

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\bar{x} \in S$ . Queremos probar que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^T H(\bar{x}) x \geq 0$ .

Como  $S$  es abierto,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} + \lambda x \in S$ , para  $\lambda$  suficientemente pequeño. Del Teorema 5.2.5 se tiene que

$$f(\bar{x} + \lambda x) \geq f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Además,

$$f(\bar{x} + \lambda x) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x + \frac{\lambda^2}{2} x^T H(\bar{x}) x + o(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Restando las dos ecuaciones, se tiene que

$$0 \geq -\frac{\lambda^2}{2} x^T H(\bar{x}) x - o(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$x^T H(\bar{x}) x + \frac{2}{\lambda^2} o(\lambda x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para  $x \neq 0$  (el caso  $x = 0$  es directo), dividamos por  $\|x\|^2$  y tomemos límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$  para obtener que  $x^T H(\bar{x}) x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , es decir, que  $H(\bar{x})$  es semi-definida positiva.

( $\Leftarrow$ ) Sean  $x, \bar{x} \in S$ . Por teorema del valor medio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x})$$

con  $\hat{x} = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x \in S$ , para algún  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Como  $H(\hat{x})$  es semi-definida positiva,  $(x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x}) \geq 0$ , luego

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S$$

Por el Teorema 5.2.5,  $f$  es convexa. ■

**Ejemplo 5.2.3** Sea  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$ . Deseamos verificar si  $f$  es convexa, cóncava o ninguna de ellas.

Podemos escribir  $f$  de una manera más conveniente como sigue:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (10, -10) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (10, -10) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x_1, x_2) \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,  $H(x) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$  (no depende explícitamente de  $x$ ).

Calculemos sus valores propios:

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 2 & -10 - \lambda \end{bmatrix} = (2 + \lambda)(10 + \lambda) - 4 = \lambda^2 + 12\lambda + 16 = 0$$

de donde  $\lambda_1 = -1,5279$  y  $\lambda_2 = -10,4721$ .

Como ambos valores son negativos,  $H(x)$  es definida negativa. Luego, por el teorema anterior,  $f$  es cóncava. Más aún, como lo demuestra el siguiente resultado,  $f$  es estrictamente cóncava.

**Corolario 5.2.2** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, convexo, no vacío, y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable en  $S$ . Se tiene que,

- (i) si  $H(x)$  es definida positiva en cada punto de  $x \in S$ , entonces  $f$  es estrictamente convexa.
- (ii) si  $f$  es estrictamente convexa, entonces  $H(x)$  es semi-definida positiva en todo punto de  $S$ .

**Demostración.**

(i) Análogamente a la segunda parte de la demostración del teorema anterior, de la igualdad

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T H(\hat{x}) (x - \bar{x})$$

y usando el hecho que  $H(x)$  es definida positiva, se obtiene

$$f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S, x \neq \bar{x},$$

Por la Observación 5.2.1, esto es equivalente a decir que  $f$  es estrictamente convexa.

(ii) Notar que de la desigualdad

$$f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S, x \neq \bar{x},$$

y de la definición de función dos veces diferenciable se obtiene, para  $x - \bar{x} = \lambda d$ , con  $d \neq 0$ ,

$$\lambda^2 d^T H(\bar{x}) d + o(\lambda d) > 0$$

de donde

$$d^T H(\bar{x}) d + \frac{o(\lambda d)}{\|\lambda d\|^2} \|d\|^2 > 0, \quad \forall x, \bar{x} \in S, x \neq \bar{x}.$$

Haciendo  $\lambda \rightarrow 0$ , se tiene que  $d^T H(\bar{x}) d \geq 0$ , es decir,  $H(\bar{x})$  es semi-definida positiva. ■

### 5.2.3. Funciones convexas subdiferenciables

**Definición 5.2.8** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa. Un vector  $\xi \in \mathbb{R}^n$  se llama **subgradiente** de  $f$  en  $\bar{x}$  si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

El conjunto de subgradientes de  $f$  en  $\bar{x}$  se denota por  $\partial f(\bar{x})$  y se llama **subdiferencial** de  $f$  en  $\bar{x}$ .

**Proposición 5.2.3** Sean  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa, y  $\bar{x} \in S$ . Entonces el subdiferencial  $\partial f(\bar{x})$  es un conjunto convexo.

**Demostración.** Sean  $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(\bar{x})$ . Entonces por definición se tiene

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi_1^T (x - \bar{x}), \quad \forall x \in S$$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi_2^T (x - \bar{x}), \quad \forall x \in S$$

Multiplicando la primera inecuación por  $\lambda \in [0, 1]$  y la segunda por  $1 - \lambda$  y luego sumando, se tiene

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + (\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2)^T (x - \bar{x}), \quad \forall x \in S$$

lo que muestra que  $\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2$  es también un subgradiente. ■

**Proposición 5.2.4** Si  $f$  es convexa y diferenciable en  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , entonces

$$\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$$

**Demostración.** Notemos primero que  $\nabla f(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x})$ , pues  $f$  es convexa (Teorema 5.2.5). Si  $\xi \in \partial f(\bar{x})$ , entonces por definición  $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x})$ ,  $\forall x \in S$ .

Sea  $x = \bar{x} + \lambda d \in S$  (para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño), se tiene que

$$f(\bar{x} + \lambda d) \geq f(\bar{x}) + \lambda \xi^t d \implies \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \geq \xi^t d$$

Tomando límite cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ ,  $\nabla f(\bar{x})^t d \geq \xi^t d$ , luego  $(\xi - \nabla f(\bar{x}))^t d \leq 0$ . Escogiendo  $d = \xi - \nabla f(\bar{x})$  y reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos  $\|\xi - \nabla f(\bar{x})\|^2 \leq 0$ , lo que implica que  $\xi = \nabla f(\bar{x})$ . ■

El siguiente teorema entrega una caracterización suficiente para la convexidad de  $f$  en el interior de su dominio convexo.

**Proposición 5.2.5** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un convexo no vacío y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\forall \bar{x} \in \text{int}(S) \exists \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\xi}^t(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S,$$

entonces  $f$  es convexa en  $\text{int}(S)$ .

**Demostración.** Sean  $x_1, x_2 \in \text{int}(S)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $S$  es convexo entonces  $\text{int}(S)$  es convexo, luego  $\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(S)$  y existe  $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ , tal que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\xi}^t(x - \bar{x}), \quad \forall x \in S.$$

En particular,

$$f(x_1) \geq f(\bar{x}) + \bar{\xi}^t(x_1 - \bar{x})$$

$$f(x_2) \geq f(\bar{x}) + \bar{\xi}^t(x_2 - \bar{x})$$

Pero  $x_1 - \bar{x} = (1 - \lambda)(x_1 - x_2)$  y  $x_2 - \bar{x} = -\lambda(x_1 - x_2)$ . Luego, multiplicando la primera desigualdad por  $\lambda$ , la segunda por  $(1 - \lambda)$  y sumando, se tiene que

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$



es decir,  $f$  es convexa. ■

Como ejercicio, se propone demostrar la proposición siguiente.

**Proposición 5.2.6** *Sean  $f$  y  $g$  son dos funciones convexas en  $S$ . Entonces*

- a) *Si  $S$  es abierto, entonces  $\bar{x} \in S$  es un mínimo de  $f$  si y sólo si  $0 \in \partial f(\bar{x})$ .*
- b)  *$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$ , para todo  $x \in S$ .*

El siguiente teorema muestra que toda función convexa es subdiferenciable en el interior de su dominio.

**Teorema 5.2.7** *Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa y  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ . Entonces existe  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , subgradiente de  $f$  en  $\bar{x}$ .*

**Demostración.** Sea el par  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ . Es claro que  $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathcal{F}(\text{epi}(f))$ . Entonces, por Teorema ?? se tiene que existe  $(\xi_0, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , no nulo tal que

$$\langle (\xi_0, \mu), (x, y) - (\bar{x}, f(\bar{x})) \rangle \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \text{epi}(f)$$

o bien

$$\xi_0^T(x - \bar{x}) + \mu(y - f(\bar{x})) \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \text{epi}(f)$$

Como  $y$  puede ser arbitrariamente grande (eso viene del hecho que  $(x, \alpha) \in \text{epi}(f) \implies (x, \beta) \in \text{epi}(f), \forall \beta \geq \alpha$ ), entonces necesariamente  $\mu \leq 0$ .

Si  $\mu = 0$  entonces  $\xi_0^T(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in S$ . Como  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , se tiene  $x = \bar{x} + \lambda \xi_0 \in S, \forall \lambda > 0$  pequeño.

De ahí, se tiene  $\xi_0^T(\bar{x} + \lambda \xi_0 - \bar{x}) \leq 0$  lo que implica que  $\xi_0 = 0$ . Contradicción.

Entonces,  $\mu < 0$ , lo cual implica, para  $\xi = -\xi_0/\mu$ :

$$-\xi^T(x - \bar{x}) + y - f(\bar{x}) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \text{epi}(f)$$

Como evidentemente  $(x, f(x)) \in \text{epi}(f)$ , entonces

$$-\xi^T(x - \bar{x}) + f(x) - f(\bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S$$

lo que implica que  $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}), \forall x \in S$  y prueba que  $\xi$  es un subgradiente de  $f$  en  $\bar{x}$ . ■

El teorema siguiente permite caracterizar la solución de un problema de optimización con función objetivo subdiferenciable.

**Teorema 5.2.8** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , función convexa y  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  convexo no vacío. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ x \in S \end{array}$$

El punto  $\bar{x} \in S$  es solución de (P) si y sólo si existe  $\xi$ , subgradiente de  $f$  en  $\bar{x}$ , tal que

$$\xi^T(x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S$$

**Demostración.** Sea  $\xi \in \partial f(\bar{x})$  tal que  $\xi^T(x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in S$ . Por convexidad,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}), \quad \forall x \in S$$

entonces obviamente

$$f(x) \geq f(\bar{x}), \quad \forall x \in S,$$

luego  $\bar{x}$  es el óptimo de (P).

Inversamente, sea ahora  $\bar{x} \in S$ , solución de (P). Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x - \bar{x}, y) / x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\bar{x})\} \\ \Omega_2 &= \{(x - \bar{x}, y) / x \in S, y \leq 0\} \end{aligned}$$

Estos conjuntos son claramente convexos y no vacíos. Además,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , puesto que si no, existe  $(x - \bar{x}, y)$  que cumple  $y > f(x) - f(\bar{x}), y \leq 0, x \in S$ , lo que implica que  $f(x) < f(\bar{x})$  y eso contradice la optimalidad de  $\bar{x}$ .

Podemos entonces ocupar el Teorema ?? (separación de dos convexos), que dice que existen  $(\xi_0, \mu), \alpha$ , tal que  $(\xi_0, \mu) \neq (0, 0)$ , que cumplen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \langle (\xi_0, \mu), (x - \bar{x}, y) \rangle \leq \alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\bar{x}) \\ (2) \quad & \langle (\xi_0, \mu), (x - \bar{x}, y) \rangle \geq \alpha, \quad x \in S, y \leq 0 \end{aligned}$$

Si en (2) hacemos  $x = \bar{x}, y = 0$ , entonces  $\alpha \leq 0$ .

Si en (1) hacemos  $x = \bar{x}$ , entonces  $\mu y \leq \alpha, y > 0$ , pero como  $y$  es arbitrario positivo, se tiene que  $\mu \leq 0$  y  $\alpha \geq 0$ .

En resumen,  $\mu \leq 0$  y  $\alpha = 0$ . Veremos que en realidad  $\mu < 0$ . En efecto, si fuese nulo, entonces de (1) se deduce que

$$\langle (\xi_0, 0), (x - \bar{x}, y) \rangle \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\bar{x})$$

de donde  $\xi_0^T(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , lo cual trivialmente implica que  $\xi_0 = 0$ , luego  $(\xi_0, \mu) = (0, 0)$ , que es una contradicción.

En conclusión, de (2) tenemos que, para  $\xi = -\xi_0/\mu$ ,

$$-\xi^T(x - \bar{x}) + y \leq 0, \quad \forall x \in S, \quad y \leq 0$$

Haciendo  $y = 0$  en esta expresión obtenemos

$$\xi^T(x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S$$

Sólo falta ver que  $\xi$  es un subgradiente. Nuevamente usamos (1), para escribir

$$\xi^T(x - \bar{x}) - y \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad y > f(x) - f(\bar{x})$$

y aplicando a la sucesión  $y_k = f(x) - f(\bar{x}) + 1/k$  tenemos

$$\xi^T(x - \bar{x}) - (f(x) - f(\bar{x}) + 1/k) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Tomando límite  $k \rightarrow \infty$  se tiene el resultado

$$f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

que dice que  $\xi \in \partial f(\bar{x})$ . ■

**Ejercicio 5.2.1** *Comente los casos:*

(a) *El punto  $\bar{x}$ , solución de (P), está en el interior de S*

(b) *La función  $f$  es diferenciable en S*

## 5.2.4. Proyección sobre conjuntos convexos

**Teorema 5.2.9** *Sea S un conjunto convexo, cerrado, no vacío en  $\mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \notin S$ . Entonces, existe un único  $\bar{x} \in S$  que minimiza la función*

$$\begin{aligned} \varphi_y : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_y(x) = \|y - x\| \end{aligned}$$

### **Demostración.**

Existencia: Sea  $\alpha = \inf\{\varphi_y(x) / x \in S\}$ . Existe una sucesión minimizante  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq S$  tal que

$$\varphi_y(x_k) \rightarrow \alpha, \quad k \rightarrow \infty.$$

Usando la propiedad conocida como Ley del Paralelogramo,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

para  $u = x_k - y$ ,  $v = x_l - y$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|x_k - x_l\|^2 &= 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - \|x_k + x_l - 2y\|^2 \\ &= 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l - y\right\|^2 \end{aligned}$$

Notar que, por convexidad de  $S$ , se tiene que  $\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l \in S$ , luego  $\left\|\frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_l - y\right\|^2 \geq \alpha^2$ , por lo tanto,

$$\|x_k - x_l\|^2 \leq 2\|x_k - y\|^2 + 2\|x_l - y\|^2 - 4\alpha^2$$

Si  $k, l \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\|x_k - y\| \rightarrow \alpha$  y  $\|x_l - y\| \rightarrow \alpha$ , luego  $\|x_k - x_l\|^2 \rightarrow 0$ , es decir,  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$  y, por lo tanto, converge a un cierto  $\bar{x} \in S$ , pues  $S$  es cerrado. Por continuidad de la norma,  $\varphi_y(\bar{x}) = \alpha$ .

Unicidad: Sea  $\bar{x} \in S$ ,  $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$ , tal que  $\varphi_y(\bar{x}) = \bar{z}$ . De manera análoga a la parte anterior, se llega a  $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|^2 \leq 2\|\bar{x} - y\|^2 + 2\|\bar{\bar{x}} - y\|^2 - 4\bar{z}^2$ , que es igual a cero, luego  $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$ . ■

**Observación 5.2.3** *El teorema anterior es válido para la norma euclídeana, pero si se usa otra norma, entonces es posible que la proyección no quede bien definida al no haber unicidad. En lo que sigue, salvo indicación expresa en contrario, siempre entenderemos que se usa la norma euclídeana.*

**Definición 5.2.9** *Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío.*

i) Para  $y \in \mathbb{R}^n$ , se define la **distancia de  $y$  a  $S$** , por  $d(y, S) = \min\{\varphi_y(x) / x \in S\}$ .

ii) Para  $y \in \mathbb{R}^n$ , se define la **proyección de  $y$  sobre  $S$** , mediante

$$P_S(y) = \arg \min\{\varphi_y(x) / x \in S\} = \bar{x} \in S,$$

siendo  $\bar{x}$  el único que satisface  $\varphi_y(\bar{x}) \leq \varphi_y(x), \forall x \in S$ .

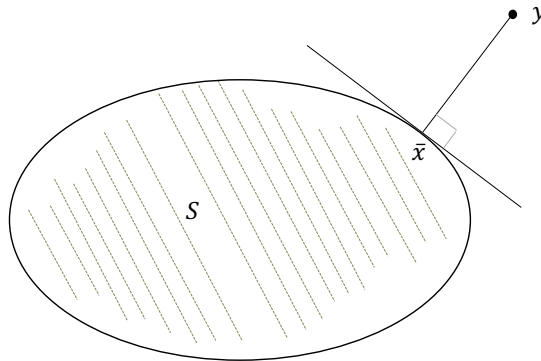


Figura 5.3: Proyección de  $y$  sobre  $S$ .

**Observación 5.2.4** La notación  $\arg \min$  se lee como "el argumento que minimiza". Claramente, si  $y \in S$  se tiene que  $d(y, S) = 0$  y  $P_S(y) = y$ .

Es claro que si  $S$  no es convexo, la proyección puede quedar mal definida, dado que el punto  $\arg \min$  puede no ser único. Igualmente, si no se usa la distancia Euclídeana se corre también el riesgo de no tener la unicidad.

**Teorema 5.2.10** Sean  $S$  un convexo cerrado no vacío e  $y \notin S$ . Se tiene que

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S$$

si y solamente si  $\bar{x}$  minimiza  $\varphi_y(x)$ .

**Demostración.** Supongamos que para cierto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|y - \bar{x} - (x - \bar{x})\|^2 \\ &= \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \\ &\geq \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 \\ &\geq \|y - \bar{x}\|^2 \end{aligned}$$

Esto implica que  $\|y - \bar{x}\| \leq \|y - x\|$ ,  $\forall x \in S$ . Es decir  $\varphi_y(\bar{x}) \leq \varphi_y(x)$ ,  $\forall x \in S$ .

Inversamente, si  $\bar{x}$  minimiza  $\varphi_y$  en  $S$ , entonces  $\forall x \in S$ :

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|y - \bar{x} - (x - \bar{x})\|^2 \\ &= \|y - \bar{x}\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \\ &\leq \|y - x\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 - 2\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle \end{aligned}$$

Luego  $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|^2$ ,  $\forall x \in S$ .

Como  $S$  es un conjunto convexo y  $\bar{x} \in S$ , entonces  $\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} \in S$ ,  $\forall \lambda \in ]0, 1[$  y por lo tanto:

$$\langle y - \bar{x}, \lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} - \bar{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} - \bar{x}\|^2$$

de donde

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq \frac{\lambda}{2}\|x - \bar{x}\|^2$$

Tomando  $\lambda \rightarrow 0^+$ , se tiene el resultado. ■

Geométricamente, el teorema anterior quiere decir que la proyección de  $y$  sobre  $S$  se alcanza en un punto  $\bar{x}$  tal que el trazo  $y - \bar{x}$  es ortogonal al conjunto.

**Teorema 5.2.11** *Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío, entonces*

$$\|P_S(x) - P_S(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Observación 5.2.5** *Esto es equivalente a decir que si  $S$  un convexo cerrado no vacío, la función de proyección  $P_S$  es función de Lipschitz (continua).*

**Ejercicio 5.2.2** *Demuestre el Teorema 5.2.11.*

## 5.2.5. Separación de convexos: teoremas de Farkas y Gordan

**Teorema 5.2.12 (Hahn-Banach)** *Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío,  $y \notin S$ . Entonces existen  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tales que*

$$\begin{aligned} p^T y &> \alpha \\ p^T x &\leq \alpha, \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

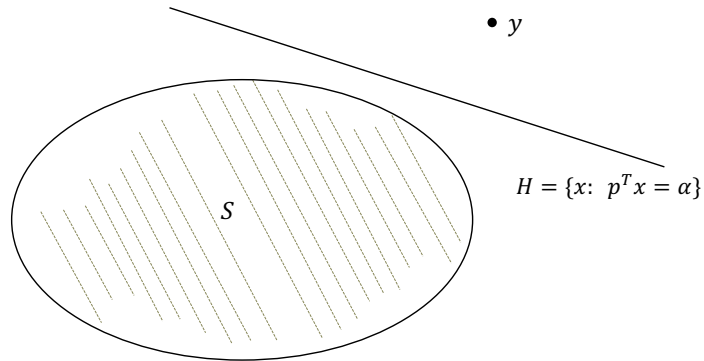


Figura 5.4:  $H$  es un hiperplano separador entre  $S$  e  $y$ .

**Demostración.** De acuerdo a lo desarrollado en la subsección anterior, existe un único  $\bar{x} \in S$  tal que  $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S$ .

Sean  $p = y - \bar{x} \neq 0$  y  $\alpha = \langle p, \bar{x} \rangle$ . Tenemos que

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S$$

por lo tanto

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, \bar{x} \rangle = \alpha \quad \forall x \in S \quad (5.1)$$

Por otro lado

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y + y - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y \rangle + \langle p, y - \bar{x} \rangle = \langle p, x - y \rangle + \|p\|^2 \leq 0, \quad \forall x \in S$$

lo que implica que

$$\langle p, x \rangle + \|p\|^2 \leq \langle p, y \rangle, \quad \forall x \in S.$$

Como  $\|p\|^2 \neq 0$ , se tiene que

$$\langle p, x \rangle < \langle p, y \rangle, \quad \forall x \in S \quad (5.2)$$

Evaluando esta expresión en  $x = \bar{x}$  y usando la definición de  $\alpha$  se tiene  $\alpha < \langle p, y \rangle$ , lo que concluye la demostración. ■

El teorema anterior introduce la noción de **hiperplano separador** (ver Figura 5.4).

**Definición 5.2.10** Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío. Un **hiperplano soportante** de  $S$  es un hiperplano  $H$  tal que  $H \cap S \neq \emptyset$  y  $\{S \subseteq H^+ \vee S \subseteq H^-\}$ .

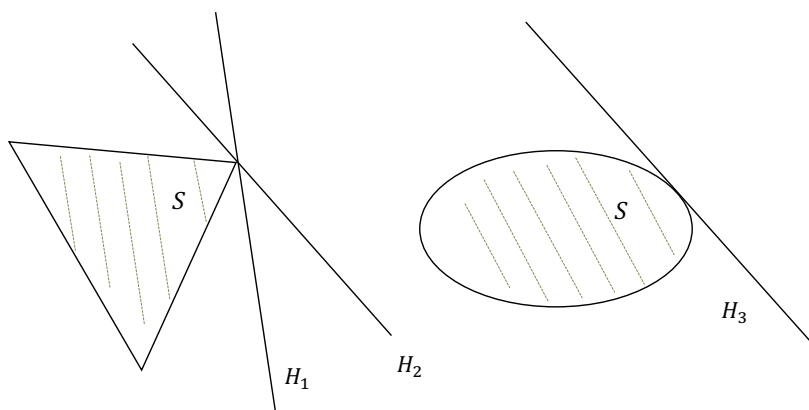


Figura 5.5: Los hiperplanos  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  son soportantes de los convexos en los puntos señalados.

Cuando definimos los poliedros, los caracterizamos como una intersección finita de semiespacios. El siguiente teorema nos permitirá deducir una caracterización similar para un conjunto convexo no vacío cualquiera.

**Teorema 5.2.13** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y sea  $\bar{x}$  un punto en la frontera de  $S$ . Entonces  $S$  tiene un hiperplano soportante en  $\bar{x}$ .

**Corolario 5.2.3** Sea  $S$  un convexo cerrado no vacío. Entonces

$$S = \cap \{W \text{ semiespacio} / S \subseteq W\}$$

**Observación 5.2.6** Note que la intersección anterior no es necesariamente finita.

**Demostración.** Basta tomar los semiespacios generados por todos los hiperplanos soportantes del convexo, que contengan a  $S$ . ■



**Teorema 5.2.14 (Farkas)** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- (1)  $Ax \leq 0$ ,  $c^T x > 0$
- (2)  $A^T y = c$ ,  $y \geq 0$

**Demostración.** Supongamos que (2) tiene solución, es decir, que existe  $y \geq 0$  tal que  $A^T y = c$ .

Si (1) tuviese solución, existiría  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax \leq 0$ ,  $c^T x > 0$ . Premultiplicando la primera desigualdad por  $y \geq 0$ , se tiene que  $y^T Ax = (A^T y)^T x = c^T x \leq 0$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto (1) no tiene solución.

Supongamos ahora que (2) no tiene solución. Sea  $S = \{z \in \mathbb{R}^n / z = A^T y, y \geq 0\}$ , que es un convexo, cerrado y no vacío.

Como (2) no tiene solución, entonces  $c \notin S$ . Luego existen  $p \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle p, c \rangle > \alpha \quad \text{y} \quad \langle p, z \rangle \leq \alpha, \forall z \in S.$$

Como  $z = 0 \in S$ , entonces  $\alpha \geq 0$ , lo que implica

$$\langle p, c \rangle > 0 \tag{5.3}$$

De  $\langle p, z \rangle \leq \alpha \quad \forall z \in S$ , se tiene que  $\langle p, A^T y \rangle = \langle Ap, y \rangle \leq \alpha$ ,  $\forall y \geq 0$ .

Supongamos que  $Ap$  tiene una coordenada estrictamente positiva, digamos  $(Ap)_1$ , y consideremos

$$y = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0$$

Entonces  $\lambda(Ap)_1 \leq \alpha \quad \forall \lambda > 0$ , lo que es una contradicción, pues se puede elegir  $\lambda$  suficientemente grande de modo de violar la desigualdad, dado que  $(Ap)_1 > 0$ . Luego,  $Ap$  no tiene coordenadas positivas, es decir,

$$Ap \leq 0 \tag{5.4}$$

De (5.3) y (5.4) se deduce que (1) tiene solución en  $x = p$ . ■

**Ejercicio 5.2.3** Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

(1)  $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$

(2)  $A^T u \geq c, u \geq 0$

Basta considerar la matriz  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$  y aplicar el teorema de Farkas. ■

**Teorema 5.2.15** Sean  $S_1$  y  $S_2$ , conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ , tales que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Existe un hiperplano que separa  $S_1$  y  $S_2$ , es decir, existe  $p \in \mathbb{R}^n$  no nulo tal que

$$p^T x_1 \geq p^T x_2 \quad \forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2.$$

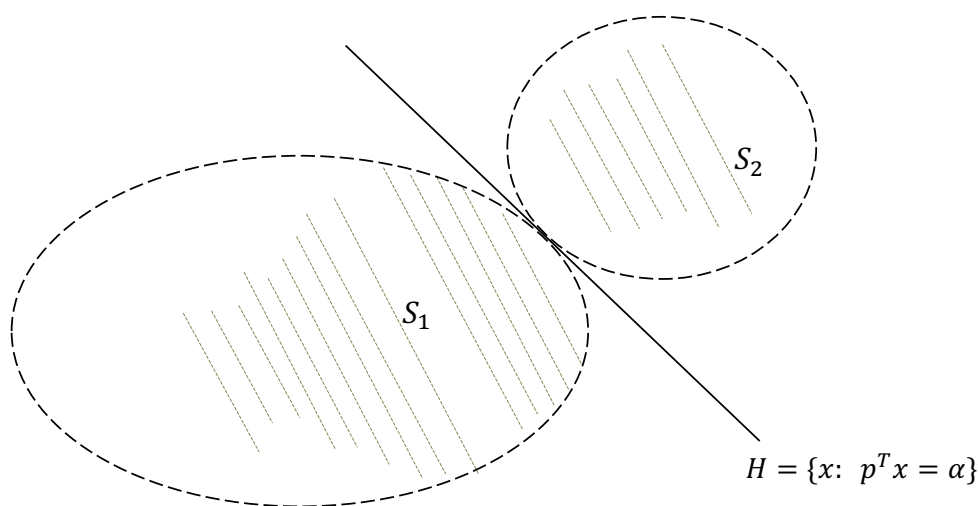


Figura 5.6: En el caso de la figura, el hiperplano separador de los dos conjuntos convexos es soportante para la clausura de ambos.

**Demostración.** Consideremos el conjunto

$$S = \{x/x = x_2 - x_1, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} = S_2 - S_1.$$

Se deduce de la Proposición 1.2.3 que  $S$  es un convexo. Además, es claro que  $0 \notin S$  (en efecto,  $0 \in S$  implicaría que  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ). Luego, usando el Teorema 5.2.12, existe  $p \neq 0$  tal que

$$p^T x \leq 0 \quad \forall x \in S$$

de donde se concluye que

$$p^T(x_2 - x_1) \leq 0 \quad \forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2$$

lo que prueba el teorema. ■

**Teorema 5.2.16 (Gordan)** *Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Entonces uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:*

- (1)  $Ax < 0$
- (2)  $A^T p = 0, p \geq 0, p \neq 0$

**Demostración.** Supongamos primero que (1) tiene solución, es decir, que existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax < 0$ . Demostraremos que (2) no tiene solución. Si no, existiría  $p \in \mathbb{R}^m, p \geq 0, p \neq 0$  tal que  $A^T p = 0$ .

Entonces, premultiplicando (1) por  $p^T$  se obtiene que  $p^T Ax < 0$ , lo que contradice que  $A^T p = 0$ .

Supongamos ahora que (1) no tiene solución. Demostraremos que (2) posee solución. Si no, definamos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{R}^m / z = Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \quad y \quad S_2 = \{z \in \mathbb{R}^m / z < 0\}$$

Como (1) no tiene solución, entonces tenemos

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= \emptyset \\ S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset \\ S_1 \quad y \quad S_2 &\text{ convexos} \end{aligned}$$

Entonces, por teorema anterior (separación de dos convexos), existe un hiperplano separador; es decir existe  $p \neq 0$  tal que

$$p^T z_1 \geq p^T z_2 \quad \forall z_1 \in S_1, z_2 \in S_2$$

Luego,

$$p^T Ax_1 \geq p^T z_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^n, z_2 \in S_2 \quad (5.5)$$

lo cual implica que

$$p^T Ax_1 \geq \sup_{z_2 < 0} \{p^T z_2\}.$$

Probaremos que  $p \geq 0$ . Si  $p$  tiene alguna coordenada negativa, entonces el supremo del lado derecho de esta desigualdad es igual a  $+\infty$ . Se deduce entonces que  $p^T Ax_1 = +\infty, \forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ , lo que es una contradicción. Así,  $p \geq 0$ .

Luego, tomando límite  $z_2 \rightarrow 0^-$  en (5.5), se tiene que  $p^T Ax_1 \geq 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ . Eligiendo  $x_1 = -A^T p$ , se tiene que  $\|A^T p\| = 0$  lo que implica  $A^T p = 0$ . Esto demuestra que (2) tiene solución. ■

### 5.3. Condiciones de optimalidad: caso sin restricciones

En esta sección, obtendremos condiciones necesarias y suficientes para resolver problemas no lineales irrestrictos (que es el caso en que  $S = \mathbb{R}^n$ ), es decir problemas del tipo:

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

En general supondremos que  $f$  es una función una o dos veces continuamente diferenciable.

#### 5.3.1. Condiciones necesarias de optimalidad

**Teorema 5.3.1 (Condiciones necesarias de optimalidad)** *Sea  $x^*$  solución local de (P) y supongamos  $f \in C^2(S)$ , donde  $S$  es un conjunto abierto que contiene a  $x^*$ . Entonces,*

- a)  $\nabla f(x^*) = 0$  y
- b) *La matriz Hessiana  $H(x^*)$  es semidefinida positiva.*

**Demostración.** Sea  $d \in \mathbb{R}^n$ , no nulo dado y consideremos la función  $g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$ .

a) Como  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  se tiene que:

$$f(x^*) \leq f(x^* + \alpha d) \quad \forall \alpha > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Es decir,

$$0 \leq \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha}.$$

Tomando límite,

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha} = g'(0)$$

Ahora, por la regla de la cadena se tiene que  $g'(\alpha) = \nabla f(x^* + \alpha d)^T d$ , lo que implica que  $g'(0) = \nabla f(x^*)^T d$ , por lo tanto

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T d.$$

Como  $d$  es arbitrario, tomando  $d = \pm e_i$ , siendo  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector de la base canónica, se deduce que  $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0$  y por lo tanto  $\nabla f(x^*) = 0$ .

b) Consideremos el desarrollo de Taylor de segundo orden,

$$g(\alpha) = g(0) + g'(0)\alpha + \frac{1}{2}g''(0)\alpha^2 + o(\alpha^2),$$

donde la función  $o(t)$  cumple  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ .

Considerando que  $g'(\alpha) = \nabla f(x^* + \alpha d)^T d$  y  $g''(\alpha) = d^T H(x^* + \alpha d)d$ , la expresión anterior se escribe

$$f(x^* + \alpha d) - f(x^*) = \alpha \nabla f(x^*)^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T H(x^*)d + o(\alpha^2),$$

por lo tanto, como  $\nabla f(x^*) = 0$  y  $f(x^* + \alpha d) - f(x^*) \geq 0$ , para  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño, se tiene que

$$0 \leq d^T H(x^*)d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}$$

Tomando  $\alpha \rightarrow 0$  se obtiene que  $H(x^*)$  es semidefinida positiva. ■

### 5.3.2. Condiciones suficientes

En relación a las condiciones suficientes, se puede fácilmente probar los siguientes teoremas, para el caso de funciones convexas (las demostraciones quedan como ejercicio de cálculo).

**Teorema 5.3.2** *Sea  $f$  una función convexa y diferenciable sobre un conjunto convexo  $S$ , abierto. Entonces  $\nabla f(x^*) = 0$  es una condición necesaria y suficiente para que  $x^* \in S$  sea un mínimo global de  $f$  sobre  $S$ .*

**Teorema 5.3.3 (Condiciones suficientes de optimalidad, caso general)** *Sea  $f \in \mathcal{C}^2(S)$ , con  $S$  abierto. Supongamos que  $x^* \in S$  satisface:*

a)  $\nabla f(x^*) = 0$ .

b) *La matriz  $H(x^*)$  es definida positiva.*

*Entonces,  $x^*$  es un mínimo local estricto de  $f$  en  $S$ .*

Es claro que los teoremas anteriores se aplican al caso irrestricto, dado podemos considerar el caso  $S = \mathbb{R}^n$ .

## 5.4. Condiciones de optimalidad: caso con restricciones

Comencemos con algunas definiciones previas, relativas al problema general, en que supondremos que todas las funciones son diferenciables.

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ & x \in X \quad (\text{abierto de } \mathbb{R}^n, \text{ no vacío}) \end{aligned}$$

Definimos los siguientes conjuntos:

**Conjunto (cono) de direcciones de descenso en  $\bar{x}$**

$$\mathcal{D}(\bar{x}) = \{d / \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$$

**Conjunto (cono) de direcciones admisibles de  $S$  en  $\bar{x}$**

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{d / d \neq 0, \bar{x} + \lambda d \in S, \forall \lambda \in [0, \eta[ \text{ para algún } \eta > 0\}$$

### Conjunto de restricciones activas en $\bar{x}$

$$I(\bar{x}) = \{i = 1, \dots, m / g_i(\bar{x}) = 0\}$$

### Conjunto (cono) de direcciones admisibles en $\bar{x}$ , con respecto a inecuaciones

$$\mathcal{G}_0(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \forall i \in I(\bar{x})\}$$

Además, por simplicidad notacional, si no hay posible confusión, escribiremos simplemente  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $I$  y  $\mathcal{G}_0$ . Estos conjuntos pueden ser vacíos en algunos casos.

**Observación 5.4.1** *La dirección  $d = -\nabla f(\bar{x})$  puede ser interpretada como la dirección de máximo descenso, en el sentido que el problema*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \nabla f(\bar{x})^T d \\ & \|d\| \leq 1 \end{aligned}$$

*tiene como solución  $d = -\frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$  (lo que es fácil de probar usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

**Teorema 5.4.1** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\bar{x} \in S$ . Si  $\bar{x}$  es mínimo local del problema*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & x \in S \end{aligned}$$

*entonces,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ .*

**Demostración.** Razonando por contradicción, supongamos que existe  $d \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ , entonces

$d \in \mathcal{A} \implies$  existe  $\eta > 0$  tal que  $\bar{x} + \lambda d \in S$ ,  $\lambda \in [0, \eta[$  y

$d \in \mathcal{D} \implies$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ ,  $\lambda \in ]0, \varepsilon[$ .

Luego  $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ , para todo  $\lambda \in ]0, \text{mín}\{\varepsilon, \eta\}[$ , lo que contradice la minimalidad local de  $\bar{x}$ . ■

Muy frecuentemente el conjunto factible  $S$  puede ser descrito mediante una sistema de inecuaciones, que denominaremos **restricciones**. Sean  $g_1, \dots, g_m$ , funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , diferenciables.

**Ejercicio 5.4.1** Probar que si  $g_1, \dots, g_m$  son funciones convexas en  $\mathbb{R}^n$  entonces el conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$  es convexo. Encontrar un contraejemplo en  $\mathbb{R}^2$  para la afirmación recíproca.

Entonces escribiremos el problema (P) de la forma:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \text{ (abierto, no vacío)} \end{aligned}$$

**Teorema 5.4.2** Sea  $\bar{x}$  un punto factible de (P), es decir,  $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$ . Supongamos que  $g_i$  es diferenciable en  $\bar{x}$  para todo  $i \in I$  y  $g_i$  es continua en  $\bar{x}$  para todo  $i \notin I$ . Entonces, si  $\bar{x}$  es mínimo local de  $f$ , se cumple que  $\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{D} = \emptyset$ .

**Demostración.** Basta probar que  $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{A}$  y luego concluir usando el teorema anterior.

Sea  $d \in \mathcal{G}_0$  y consideremos el caso  $i \in I$ . Entonces  $\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$ , luego existe  $\eta_i > 0$  tal que

$$\bar{x} + \lambda d \in X \text{ y } g_i(\bar{x} + \lambda d) < g_i(\bar{x}) \quad \lambda \in ]0, \eta_i[.$$

Notar que el lado derecho de esta última desigualdad es nulo, entonces se tiene que

$$\bar{x} + \lambda d \in X \text{ y } g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0 \quad \lambda \in ]0, \eta[,$$

para  $\eta = \text{mín}_{j \in I} \{\eta_j\}$ .

Tomemos ahora  $i \notin I$ . Como  $\bar{x}$  es factible, entonces cumple  $g_i(\bar{x}) < 0$ . De allí, por continuidad, se deduce que existe  $\varepsilon_i > 0$  tal que

$$\bar{x} + \lambda d \in X \text{ y } g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0 \quad \lambda \in [0, \varepsilon_i[.$$

Sean  $\varepsilon = \text{mín}_{i \notin I} \{\varepsilon_i\}$  y  $\Delta = \text{mín}\{\eta, \varepsilon\}$ . Entonces podemos decir que

$$\bar{x} + \lambda d \in X \text{ y } g_i(\bar{x} + \lambda d) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall \lambda \in [0, \Delta[$$

Entonces  $d \in \mathcal{A}$ , lo que completa la demostración. ■

**Observación 5.4.2** Lo anterior dice que si  $\bar{x}$  es mínimo local, entonces  $\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0$ , para todo  $d \in \mathcal{A}$ . Si  $S$  es convexo, esto se escribe:  $\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0$ , para todo  $x \in S$ .



A continuación daremos una secuencia de teoremas que nos lleva a probar un resultado general de caracterización de optimalidad. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l \\ & x \in X \text{ (abierto, no vacío)} \end{aligned}$$

**Teorema 5.4.3** *Sea  $\bar{x}$ , mínimo local de (P). Supongamos que*

*$g_i$  es diferenciable en  $\bar{x}$ , para todo  $i \in I$ ,*

*$g_i$  es continua en  $\bar{x}$ , para todo  $i \notin I$ ,*

*$h_j$  es de clase  $C^1$  en  $\bar{x}$ , para todo  $j = 1, \dots, l$ ,*

*$\{\nabla h_j(\bar{x}) / j = 1, \dots, l\}$  es linealmente independiente.*

*Entonces  $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{H}_0 = \emptyset$ , donde  $\mathcal{H}_0 = \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, \dots, l\}$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe  $d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{H}_0$ , es decir,

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0$$

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \quad i \in I$$

$$\nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, \dots, l$$

y definamos la matriz ( $n \times l$ )

$$\nabla h(x) = [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_l(x)]$$

que para  $x = \bar{x}$  tiene rango  $l$ , por hipótesis. De hecho, esto impone que  $l \leq n$ .

Sea también  $P(t)$  la matriz de proyección de un vector cualquiera sobre el núcleo de la matriz  $\nabla h(x(t))^T$  y consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = P(t)d, \quad x(0) = \bar{x}, \quad t \geq 0$$

Se sabe que, en general, para una matriz cualquiera  $M$  de rango filas completo, la proyección sobre el núcleo de ella está caracterizada por la matriz  $I - M^T(MM^T)^{-1}M$ . Por lo tanto, para el caso  $M = \nabla h(x(t))^T$  se tiene que la proyección está dada por

$$P(t) = I - \nabla h(x(t))[\nabla h(x(t))^T \nabla h(x(t))]^{-1} \nabla h(x(t))^T$$

Como  $\nabla h(\bar{x})$  es de rango completo  $l$ , entonces  $[\nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})]^{-1}$  existe y por continuidad de  $\nabla h$ , se tiene que  $[\nabla h(x(t))^T \nabla h(x(t))]^{-1}$  existe para  $t > 0$  pequeño, lo que implica que  $P(t)$  es continua para  $t$  pequeño. Así, la solución de la ecuación diferencial existe y es continua.

De ahí se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \bar{x}$ .

Se demostrará ahora que  $x(t)$ , para  $t$  pequeño, es factible y satisface  $f(x(t)) < f(\bar{x})$ , lo que contradice que  $\bar{x}$  sea óptimo local.

Para  $i \in I$ ,

$$\frac{d}{dt}g_i(x(t)) = \nabla g_i(x(t))^T \dot{x}(t) = \nabla g_i(x(t))^T P(t)d$$

pero,

$$P(0)d = [I - \nabla h(\bar{x})[\nabla h(\bar{x})^T \nabla h(\bar{x})]^{-1} \nabla h(\bar{x})^T]d = d$$

pues  $d \in \mathcal{H}_0$ , luego  $\nabla h(\bar{x})^T d = 0$ . Entonces

$$\frac{d}{dt}g_i(x(t))|_{t=0} = \nabla g_i(x(t))^T P(t)d|_{t=0}$$

o sea,

$$\frac{d}{dt}g_i(\bar{x}) = \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \quad \forall i \in I \text{ pues } d \in \mathcal{G}_0$$

lo que implica que

$$g_i(x(t)) < 0, \text{ para } t \text{ pequeño, } \forall i \in I$$

Para  $i \notin I$  se tiene  $g_i(\bar{x}) < 0$  y, como  $g_i$  es continua en  $\bar{x}$ , tenemos

$$\forall i \notin I : g_i(x(t)) < 0, \text{ para } t \text{ pequeño.}$$

Como  $X$  es abierto entonces  $x(t) \in X$ , para  $t$  pequeño.

Ahora bien, por el teorema del valor medio, tenemos

$$h_j(x(t)) = h_j(\bar{x}) + t \frac{d}{dt}h_j(x(t')) = t \frac{d}{dt}h_j(x(t')) \quad (\exists t' \in ]0, t]) \quad (5.6)$$

Pero

$$\frac{d}{dt}h_j(x(t')) = \nabla h_j(x(t'))^T \dot{x}(t') = \nabla h_j(x(t'))^T P(t')d = 0$$

pues por construcción  $P(t')d$  está en el núcleo de  $\nabla h(x(t'))^T$ .

Luego, de (5.6) se deduce que  $h_j(x(t)) = 0$ , para  $j = 1, \dots, l$  y  $t$  pequeño.

Así,  $x(t)$  es factible para  $(P)$ ,  $t$  pequeño.

Respecto a la función objetivo se observa que

$$\frac{d}{dt}f(x(0)) = \frac{d}{dt}f(x(t))|_{t=0} = \nabla f(x(t))^T \dot{x}(t)|_{t=0} = \nabla f(x(t))^T P(t)d|_{t=0} = \nabla f(\bar{x})^T d < 0$$

de donde necesariamente  $f(x(t)) < f(\bar{x})$ , para  $t$  pequeño, lo que contradice la optimalidad local de  $\bar{x}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{H}_0 = \emptyset$ . ■

**Teorema 5.4.4 (Fritz-John)** *Sea  $\bar{x}$ , mínimo local de  $(P)$ . Supongamos que  $g_i$  es diferenciable en  $\bar{x}$ , para todo  $i \in I$ ,  $g_i$  es continua en  $\bar{x}$ , para todo  $i \notin I$ ,  $h_j$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\bar{x}$ , para todo  $j = 1, \dots, l$ .*

Entonces existen escalares  $u_0, u_i, i \in I, v_j, j = 1, \dots, l$  no todos nulos, tales que

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

$$u_0, u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

**Demostración.** Si  $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j=1, \dots, l}$  es un conjunto linealmente dependiente, existen  $v_1, \dots, v_l$  no todos nulos tales que  $\sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$ , luego basta elegir  $u_0 = u_i = 0, \forall i \in I$  y se tiene el resultado.

Si suponemos que el conjunto  $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j=1, \dots, l}$  es linealmente independiente (lo cual significa que  $l \leq n$ ). Sean las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \nabla f(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla g_i(\bar{x})^T \\ \vdots \end{bmatrix}_{i \in I} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \nabla h_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla h_l(\bar{x})^T \end{bmatrix}$$

Por teorema anterior ( $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{H}_0 = \emptyset$ ) se tiene que no existe  $d$  tal que  $A_1 d < 0$  y  $A_2 d = 0$ .

Si usamos el teorema de separación de dos convexos, aplicado a los conjuntos

$$S_1 = \{(z_1, z_2) / z_1 = A_1 d, z_2 = A_2 d, d \in \mathbb{R}^n\}$$

$$S_2 = \{(z_1, z_2) / z_1 < 0, z_2 = 0\}$$

que tienen intersección vacía, entonces existe  $(u, v) \neq (0, 0)$ , tal que

$$u^T z_1^1 + v^T z_2^1 \geq u^T z_1^2 + v^T z_2^2, \quad \forall (z_1^1, z_2^1) \in S_1, (z_1^2, z_2^2) \in S_2$$

o bien

$$u^T z_1^1 + v^T z_2^1 \geq u^T z_1^2, \quad \forall (z_1^1, z_2^1) \in S_1, z_1^2 < 0$$

Entonces, como  $(0, 0) \in S_1$  se deduce que  $u^T z_1^2 \leq 0$ , lo que implica que  $u \geq 0$ , luego

$$u^T A_1 d + v^T A_2 d \geq u^T z_1^2, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n, z_1^2 < 0.$$

Haciendo  $z_1^2 \rightarrow 0^-$  se tiene

$$(u^T A_1 + v^T A_2) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

de donde

$$A_1^T u + A_2^T v = 0$$

Entonces notando los vectores  $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \in I}$  y  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix}$  se tiene el resultado

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0, \quad (u, v) \neq (0, 0), u \geq 0 \quad \blacksquare$$

Este teorema implica trivialmente el que está a continuación.

**Teorema 5.4.5 (Karush-Kuhn-Tucker, igualdades y desigualdades)** Sean las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $i = 1, \dots, m$  y  $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $j = 1, \dots, l$  diferenciables.

Sean  $\bar{x}$  un punto factible y supongamos que el conjunto  $\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}), i \in I, j = 1, \dots, l\}$  es linealmente independiente.

Entonces, si  $\bar{x}$  es solución de (P), existen  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $v_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, l$  tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) &= 0 \\ u_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

**Demostración.** En primer lugar veremos que  $u_0 \geq 0$  no puede ser nulo. En efecto, si  $u_0 = 0$  entonces del teorema de Fritz-John, se tiene

$$\sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

lo que, por independencia lineal de los gradientes, implica  $u_i = 0$  para todo  $i \in I$ , y  $v_j = 0$ , para todo  $j = 1, \dots, l$ . Eso contradice Fritz-John.

Entonces dividiendo todo por  $u_0$  se obtiene, para  $u_i \leftarrow u_i/u_0$ ,  $v_j \leftarrow v_j/u_0$ , la expresión

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

Y ahí, para extender la suma del término del medio, obligamos  $u_i = 0$  para los casos  $i \notin I$ , incluyendo una ecuación al sistema. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) &= 0 \\ u_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

**Ejemplo 5.4.1** Veremos aquí cuán importantes son las hipótesis del teorema anterior. El siguiente es un problema clásico, que tiene como solución óptima el punto  $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 \\ & g_1(x) = -(1 - x_1)^3 + x_2 \leq 0 \\ & g_2(x) = \quad \quad \quad -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Como puede verse en la Figura (5.7), la versión del teorema de Karusch-Kuhn-Tucker (KKT) no es aplicable en este caso, pues los gradientes de  $g_1$  y  $g_2$  no son linealmente independientes en  $x^*$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \nabla g_1(x^*) &= \begin{pmatrix} 3(1 - x_1^*)^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \nabla g_2(x^*) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \nabla f(x^*) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

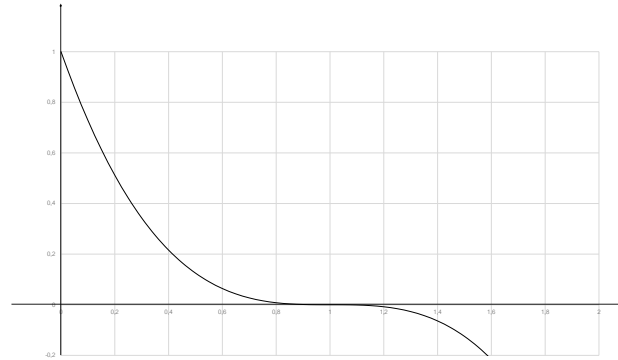


Figura 5.7: El teorema de KKT no es aplicable en el óptimo.

Se observa que no existen  $\mu_1, \mu_2 \geq 0$  que satisfagan  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 5.4.2** *Analizar el problema*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 \\ & g_1(x) = -(1 - x_1)^p + x_2 \leq 0 \\ & g_2(x) = \quad \quad \quad -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

en los casos  $p = 1, 2$ .

### Interpretación geométrica del teorema de Karush-Kuhn-Tucker

El teorema de Karush-Kuhn-Tucker puede ser interpretado geoméricamente como sigue. Consideremos un problema en dos dimensiones como el que se muestra en la Figura 5.9. El cono de direcciones admisibles está dado por

$$\mathcal{A} = \mathcal{G}_0 = \{d \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \quad i = 1, 2\}$$

Bajo la hipótesis de independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas, para que  $\bar{x}$  sea un mínimo local, es necesario que el vector  $-\nabla f(\bar{x})$  forme un ángulo obtuso con toda dirección admisible  $d$ , lo que equivale a decir que  $-\nabla f(\bar{x})$  es combinación lineal positiva de los vectores del conjunto  $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I}$ .

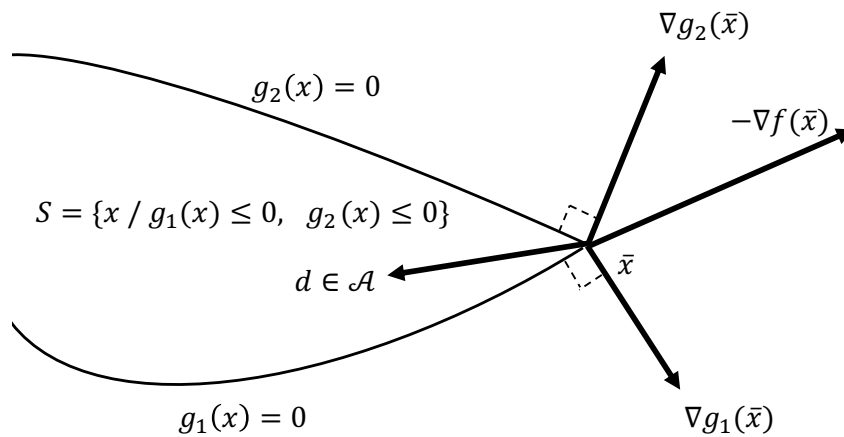


Figura 5.8: Ilustración de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker en el plano.

**Ejemplo 5.4.2** Una aplicación interesante de esta versión del teorema de KKT es el caso de la programación lineal. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde la matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y los vectores  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  son los datos del problema. Se puede escribir equivalentemente,

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ -x &\leq 0 \\ Ax - b &= 0 \end{aligned}$$

de manera que las funciones  $f$ ,  $g_i$  y  $h_j$  del problema general están dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &= c^T x \\ g_i(x) &= -x_i \\ h_j(x) &= \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k - b_j \end{aligned}$$

Los gradientes respectivos son

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= c \\ \nabla g_i(x) &= -e_i \\ \nabla h_j(x) &= (a_{j1}, \dots, a_{jn})^T \end{aligned}$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Las ecuaciones de KKT en este caso se pueden escribir

$$\begin{aligned} c + \sum_{i=1}^n u_i(-e_i) + \sum_{j=1}^m v_j(a_{j1}, \dots, a_{jn})^T &= 0 \\ u_i(-x_i) &= 0 \quad i = 1, \dots, n \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Introduciendo la notación  $y = -v$ ,  $s = u$  se obtiene

$$\begin{aligned} A^T y + s &= c \\ x^T s &= 0 \\ s &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces la caracterización completa de la solución del problema de programación lineal es la siguiente:  $x$  es solución del problema (P) si y sólo si existen vectores  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , tales que

$$\begin{aligned} Ax = b, \quad x \geq 0 & \quad (\text{factibilidad primal}) \\ A^T y + s = c, \quad s \geq 0 & \quad (\text{factibilidad dual}) \\ x^T s = 0 & \quad (\text{holgura complementaria}) \end{aligned}$$

Este es un sistema difícil de resolver, dado que algunas variables deben ser positivas y además deben satisfacer una ecuación no lineal (ortogonalidad de  $x$  y  $s$ ). De hecho, el algoritmo Simplex es una forma de resolver este sistema.



**Observación 5.4.3** *El sistema anterior, que se deduce de la aplicación del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker al caso lineal canónico, corresponde también a una aplicación del Teorema de Holgura Complementaria de la programación lineal. En efecto, la primera ecuación establece la factibilidad de la solución primal y la segunda establece la factibilidad de la solución dual. Finalmente, la tercera ecuación caracteriza la optimalidad.*

**Observación 5.4.4** *Notemos que, en el caso lineal anterior, aplicamos el teorema de KKT sin verificar la condición de independencia de los gradientes de las restricciones activas. En general, esa condición no se cumple en el caso lineal, pero eso no significa que el teorema no sea aplicable. Lo que ocurre es que el teorema de KKT es también válido con hipótesis menos fuertes que la independencia lineal de los gradientes, como se verá en la sección siguiente.*

**Observación 5.4.5** *Si solamente hay restricciones de igualdad, el teorema de KKT se convierte en el clásico teorema de Lagrange*

$$\nabla_x L(x, v) = 0$$

$$\text{donde } L(x, v) = f(x) + \sum_{j=1}^l v_j h_j(x)$$

### 5.4.1. Calificación de restricciones

En este capítulo mostraremos que el teorema de KKT es también válido sin imponer la hipótesis de independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas y de igualdad. Al estudio de las hipótesis para derivar condiciones de optimalidad se le conoce como **calificación de restricciones**, siendo la independencia de los gradientes la más clásica, pero la más restrictiva.

Definamos primero un nuevo concepto: el cono tangente o cono de tangentes.

**Definición 5.4.1** *Sean  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío y  $\bar{x} \in \text{adh}S$ . Se llama **cono de tangentes** de  $S$  en el punto  $\bar{x}$  al conjunto*

$$\mathcal{T}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n / d = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k (x_k - \bar{x}), \lambda_k > 0, x_k \in S, \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}\}$$

*Si no hay posible confusión, se usa simplemente la notación  $\mathcal{T}$ .*

**Teorema 5.4.6** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , no vacío y  $\bar{x} \in S$ . Supongamos que  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  es mínimo local del problema*

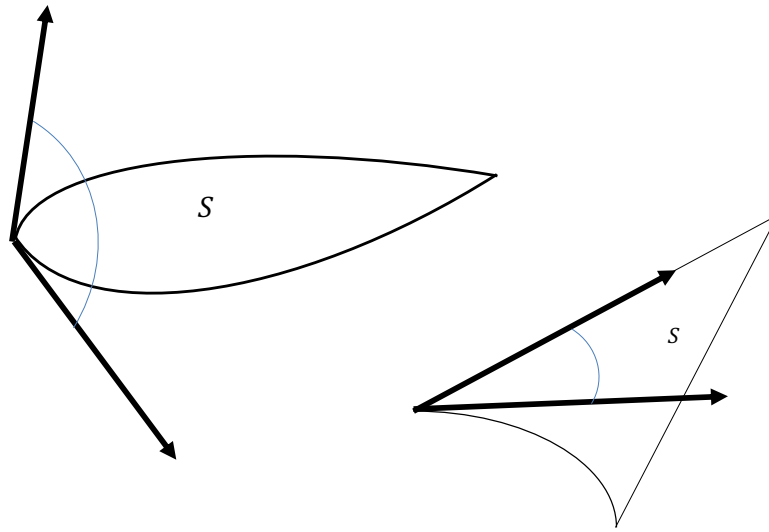


Figura 5.9: Conos de tangentes en el plano.

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ x \in S \end{array}$$

entonces  $\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \emptyset$

**Demostración.** Sea  $d \in \mathcal{T}$ . Por definición, se sabe que existe una sucesión  $\{\lambda_k\}$ , positiva estricta, y otra  $\{x_k\}$  en  $S$ , convergente a  $\bar{x}$ , tales que  $d = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(x_k - \bar{x})$ . Por diferenciabilidad podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x_k - \bar{x}) + \|x_k - \bar{x}\|o(x_k; \bar{x}) \\ o(x_k; \bar{x}) &\longrightarrow 0 \text{ con } x_k \longrightarrow \bar{x} \end{aligned}$$

Como  $\bar{x}$  es mínimo local, para un cierto  $k_0$  suficientemente grande se tiene  $f(\bar{x}) \leq f(x_k)$ , para  $k \geq k_0$ , luego multiplicando todo por  $\lambda_k$  se tiene

$$\nabla f(\bar{x})^T \lambda_k(x_k - \bar{x}) + \|\lambda_k(x_k - \bar{x})\|o(x_k; \bar{x}) \geq 0, \text{ para } k \geq k_0$$

y tomando límite se obtiene  $\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0$ , lo cual prueba que  $d \notin \mathcal{D}$ . ■

**Ejercicio 5.4.3** Demuestre que  $\mathcal{T}$  es un cono cerrado y diga si es convexo o bien encuentre un contraejemplo.

### Hipótesis de Abadie, caso con desigualdades

La hipótesis de Abadie para el caso con restricciones de desigualdad es:

$$\mathcal{T} = \mathcal{G}'_0$$

donde  $\mathcal{G}'_0 = \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, i \in I\}$ .

**Ejercicio 5.4.4** Pregunta: ¿se puede probar que, en general,  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}'_0$ ? Si así fuese, la hipótesis de Abadie podría ser escrita solamente como una inclusión.

**Teorema 5.4.7 (Karush-Kuhn-Tucker con hipótesis de Abadie)** Sean  $X$ , conjunto no vacío en  $\mathbb{R}^n$  y el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{aligned}$$

Supongamos que  $\bar{x}$  es mínimo local de (P),  $g_i$  es diferenciable en  $\bar{x}$ ,  $\forall i \in I$  y  $\mathcal{T} = \mathcal{G}'_0$ . Entonces existen  $u_i \geq 0$ ,  $\forall i \in I$  tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

**Demostración.** Sabemos que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \emptyset$ , luego  $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}'_0 = \emptyset$ , lo cual implica que el sistema

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0, \quad \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad i \in I$$

no tiene solución. Entonces, aplicando el teorema de Farkas para el caso

$$c = -\nabla f(\bar{x}), \quad A = \begin{bmatrix} \vdots \\ \nabla g_i(\bar{x})^T \\ \vdots \end{bmatrix}_{i \in I}$$

existen  $u_i \geq 0$ ,  $\forall i \in I$  tales que

$$\sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = -\nabla f(\bar{x})$$

lo que termina la demostración. ■

A continuación veremos que este teorema se aplica al **caso de la programación lineal**, sin necesidad de imponer la independencia lineal de los gradientes. Consideremos la región factible dada por un sistema de desigualdades  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$  y sea  $\bar{x}$  un punto factible, que nos permite descomponer la matriz en la forma (eventualmente reordenando filas)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

siendo  $A_1\bar{x} = b_1$  y  $A_2\bar{x} < b_2$ . Naturalmente la matriz  $A_1$  corresponde a las restricciones que son activas en  $\bar{x}$ .

Demostraremos que  $\mathcal{T} = \mathcal{G}'_0$ , lo que garantiza que el caso lineal satisface la condición de Abadie.

**En primer lugar, si  $A_1$  no existe**, es decir no hay restricciones activas en  $\bar{x}$ , entonces obviamente  $\mathcal{G}'_0 = \mathbb{R}^n$  y, dado que  $\bar{x} \in \text{int}(S)$ , se tiene que  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n$  (probar eso como ejercicio), por lo tanto  $\mathcal{T} = \mathcal{G}'_0$ .

**Ahora bien, si la matriz  $A_1$  existe**, entonces es claro que  $\mathcal{G}'_0 = \{d / A_1d \leq 0\}$  (probarlo como ejercicio).

Sea entonces  $d \in \mathcal{T}$ , dado por  $d = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(x_k - \bar{x})$ . Entonces,

$$A_1(x_k - \bar{x}) = A_1x_k - A_1\bar{x} \leq b_1 - b_1 = 0$$

Multiplicando por  $\lambda_k$  tenemos

$$A_1(\lambda_k(x_k - \bar{x})) \leq 0$$

y tomando límite tenemos el resultado  $A_1d \leq 0$ , lo que prueba  $d \in \mathcal{G}'_0$ .

Sea ahora  $d \in \mathcal{G}'_0$ , lo que implica  $A_1d \leq 0$ .

Como  $A_2\bar{x} < b_2$ , entonces existe  $\bar{\alpha} > 0$  tal que

$$A_2(\bar{x} + \alpha d) < b_2, \quad \text{para todo } \alpha \in [0, \bar{\alpha}].$$

Además,

$$A_1(\bar{x} + \alpha d) = A_1\bar{x} + \alpha A_1d \leq b_1 + 0, \quad \alpha \geq 0$$

Es decir,

$$A(\bar{x} + \alpha d) \leq b \text{ para todo } \alpha \in [0, \bar{\alpha}]$$

Entonces, basta elegir  $\lambda_k = 2k/\bar{\alpha}$  y  $x_k = \bar{x} + \frac{\bar{\alpha}}{2k}d \in S$ . Con eso tenemos

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k (x_k - \bar{x})$$

lo que prueba que  $d \in \mathcal{T}$ . ■

De lo anterior fluye fácilmente que se las ecuaciones de KKT son aplicables a todo problema de programación lineal.

### Hipótesis de Abadie, caso con igualdades y desigualdades

La hipótesis de Abadie para el caso con restricciones de igualdad y desigualdad es:

$$\mathcal{T} = \mathcal{G}'_0 \cap \mathcal{H}_0$$

donde  $\mathcal{H}_0 = \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, j = 1, \dots, l\}$ .

**Teorema 5.4.8 (Karush-Kuhn-Tucker, con hipótesis de Abadie)** Sean  $X$  conjunto no vacío en  $\mathbb{R}^n$  y  $\bar{x}$ , mínimo local de

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ & x \in X \end{aligned}$$

Supongamos que  $g_i, i \in I, h_j, j = 1, \dots, l$  son diferenciables en  $\bar{x}$  y  $\mathcal{T} = \mathcal{G}'_0 \cap \mathcal{H}_0$ . Entonces existen  $u_i \geq 0, i \in I, v_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, l$ , tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

**Demostración.** Como  $\bar{x}$  es mínimo local de (P), entonces  $\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \emptyset$  lo cual, por hipótesis, implica  $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}'_0 \cap \mathcal{H}_0 = \emptyset$ . Entonces el sistema

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0, \quad \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad i \in I, \quad \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j = 1, \dots, l$$

no tiene solución. Escrito en forma matricial, no existe  $d$  que satisfaga

$$-\nabla f(\bar{x})^T d > 0$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \nabla g_i(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla h_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla h_l(\bar{x})^T \\ \vdots \\ -\nabla h_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ -\nabla h_l(\bar{x})^T \end{bmatrix}_{i \in I} d \leq 0$$

Usando Farkas, se tiene que existen  $u_i \geq 0, i \in I, w_1, \dots, w_l \geq 0, w'_1, \dots, w'_l \geq 0$  tales que

$$\sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l w_j \nabla h_j(\bar{x}) - \sum_{j=1}^l w'_j \nabla h_j(\bar{x}) = -\nabla f(\bar{x})$$

es decir, haciendo  $v_j = w_j - w'_j$ , se tiene

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

lo que termina la demostración. ■

**Observación 5.4.6** *Notar que al aplicar la hipótesis de Abadie, no ha sido necesario considerar que  $X$  sea abierto ni que las funciones  $g_i, i \notin I$  sean continuas en  $\bar{x}$ .*

**Observación 5.4.7** *Si todas las restricciones son diferenciables en el punto  $\bar{x}$ , la condición también puede ser escrita en la forma*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{x}) &= 0 \\ u_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

**Observación 5.4.8** *Existen otras nociones de calificación de restricciones, que no veremos aquí. A modo de ejemplo, mencionamos la hipótesis de Slater que, de manera simplificada, en un problema con restricciones de desigualdad solamente, se puede resumir en: el conjunto factible tiene interior no vacío, es decir, existe  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $g_i(x^*) < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Tanto la independencia de los gradientes, como la hipótesis de Slater implican la de Abadie, es decir, esta última es más general.*

*En términos prácticos, estas hipótesis muchas veces son imposibles de verificar con antelación en un problema dado, especialmente si se trata de modelos reales, razón por la cual la resolución de esas instancias es abordada sin examinar ese aspecto, aplicando por ejemplo las condiciones de KKT sin verificar su aplicabilidad. Igualmente, si numéricamente se detecta un punto que satisface aproximadamente las condiciones de KKT, tampoco se pregunta si será o no efectivamente el mínimo global. Muchos algoritmos se contentan con alcanzar un buen punto factible que aproxime KKT.*

# Capítulo 6

## Dualidad en optimización no Lineal

Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

### 6.1. Función Lagrangeana

**Definición 6.1.1** *Se define la función dual Lagrangeana por:*

$$\theta(u, v) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^l v_j h_j(x) \right\}, \quad u \in \mathbb{R}_+^m, \quad v \in \mathbb{R}^l$$

**Ejemplo 6.1.1** *Consideremos el problema*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & g_1(x) = 2x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0 \\ & g_2(x) = x_1 - x_2 - 10 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

*En este caso la función dual es simplemente*

$$\theta(u_1, u_2) = \inf_{x_1, x_2} \left\{ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + u_1(2x_1 + 2x_2 - 1) + u_2(x_1 - x_2 - 10) \right\}$$



Derivando el lado derecho con respecto a  $x_1, x_2$  e igualando a cero (condición de optimalidad) se obtiene

$$x_1 = -u_1 - u_2/2, \quad x_2 = 2 - u_1 + u_2/2$$

de donde

$$\theta(u) = -2u_1^2 - \frac{u_2^2}{2} + 3u_1 - 12u_2$$

## 6.2. Problema dual Lagrangeano

**Definición 6.2.1** El problema dual Lagrangeano de  $(P)$  es

$$(D) \quad \sup \theta(u, v), \quad u \geq 0$$

Notar que el problema  $(D)$  es siempre factible. En nuestro ejemplo anterior, la solución de

$$(D) \quad \text{máx} -2u_1^2 - \frac{u_2^2}{2} + 3u_1 - 12u_2, \quad u_1, u_2 \geq 0$$

es  $u_1 = 3/4, u_2 = 0$  y el valor de la función objetivo dual es  $\theta^* = 9/8$ . La solución del problema primal  $(P)$  es  $x_1 = -3/4, x_2 = 5/4$  y el valor de la función objetivo es  $f^* = 9/8$ . Esta igualdad entre los valores óptimos de  $(P)$  y  $(D)$  es válida en algunos casos, pero no es válida en general, pues depende de algunas hipótesis sobre los datos del problema, como veremos más adelante.

**Ejemplo 6.2.1** El problema canónico de programación lineal

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Aquí la función dual es  $\theta(v) = \inf_{x \geq 0} \{c^T x + v^T (Ax - b)\}$ .

Notar que se ha considerado  $X = \mathbb{R}_+^n$ , pero también se podría considerar la positividad de  $x$  como  $n$  restricciones de desigualdad. Entonces, fácilmente se puede ver que

$$\theta(v) = \inf_{x \geq 0} \{(A^T v + c)^T x\} - v^T b = \begin{cases} -v^T b & \text{si } A^T v + c \geq 0 \\ -\infty & \text{si } (A^T v)_j + c_j < 0 \text{ algún } j \end{cases}$$

Luego el problema dual  $(D)$   $\text{máx} \theta(v)$  corresponde a (cambiando la variable  $v$  por  $-y$ )

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

que es el dual de (P), bien conocido en programación lineal.

### 6.3. Teoremas de dualidad

De aquí en adelante usaremos notación compacta

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

donde se  $g(x)$  denota el vector cuyas coordenadas son los valores reales  $g_i(x)$ , notación análoga para  $h(x)$ . El dual se escribe entonces

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx} \quad & \theta(u, v) \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

siendo  $\theta(u, v) = \inf_{x \in X} \{f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)\}$

#### 6.3.1. Dualidad débil

**Teorema 6.3.1 (Dualidad débil)** *Si  $\bar{x}$  y  $(\bar{u}, \bar{v})$  son puntos factibles respectivos de los problemas (P) y (D), entonces*

$$f(\bar{x}) \geq \theta(\bar{u}, \bar{v})$$

**Demostración.**

$$\theta(\bar{u}, \bar{v}) = \inf_{x \in X} \{f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x)\} \leq f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$$

pues  $\bar{u}^T g(\bar{x}) \leq 0$  y  $\bar{v}^T h(\bar{x}) = 0$ . ■

**Corolario 6.3.1** *La propiedad anterior es válida para los valores óptimos respectivos:*

$$f^* = f(x^*) \geq \theta(u^*, v^*) = \theta^*$$

*y si en la dualidad débil se produce la igualdad, entonces los puntos en cuestión  $x^*$  y  $(u^*, v^*)$  son soluciones respectivas de los dos problemas.*

**Corolario 6.3.2** *Si  $(P)$  es no acotado entonces  $\theta(u, v) = -\infty$  para todo  $u \geq 0, v \in \mathbb{R}^l$ .*

**Corolario 6.3.3** *Si  $(D)$  es no acotado entonces  $(P)$  es infactible.*

### 6.3.2. Dualidad fuerte

Antes de analizar la dualidad fuerte, necesitamos una herramienta adicional, que es un teorema de separación adaptado a nuestro problema.

**Lema 6.3.1** *Sean  $X$ , no vacío y convexo y las funciones*

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{convexa}$$

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{convexa (cada } g_i \text{ lo es)}$$

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad \text{afín, } h(x) = Ax - b$$

*y los sistemas*

$$(1) \text{ Encontrar } x \in X \text{ tal que } \alpha(x) < 0, g(x) \leq 0, h(x) = 0,$$

$$(2) \text{ Encontrar } (u_0, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \text{ tal que}$$

$$(u_0, u, v) \neq 0, (u_0, u) \geq 0 : u_0 \alpha(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \geq 0, \forall x \in X$$

*Entonces,*

*Si (1) no tiene solución  $\implies$  (2) tiene solución.*

*Si (2) tiene solución y  $u_0 > 0 \implies$  (1) no tiene solución.*

**Demostración.** Supongamos que (1) no tiene solución. Consideremos

$$\Omega = \{(p, q, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l / p > \alpha(x), q \geq g(x), r = h(x), \text{ algún } x \in X\}$$

Este conjunto es convexo y no contiene al cero.

Existe un corolario del teorema de separación de punto y convexo, que no probaremos aquí (en todo caso, no es difícil), que dice lo siguiente:

Si  $S$  es un conjunto convexo no vacío y  $\bar{x} \notin S$ , entonces existe un vector  $w$ , no nulo, tal que  $w^T(x - \bar{x}) \leq 0$ , para todo  $x \in \text{adh}S$ .

Usando esa propiedad, podemos decir entonces que existe  $(u_0, u, v) \neq \vec{0}$ , tal que

$$\langle (u_0, u, v), (p, q, r) - (0, 0, 0) \rangle \geq 0, \quad \forall (p, q, r) \in \text{adh}(\Omega)$$

Luego,  $u_0 p + u^T q + v^T r \geq 0$ , para todo  $(p, q, r) \in \text{adh}(\Omega)$ .

Pero,  $p$  y  $q$  se pueden escoger arbitrariamente grandes (ver la definición de  $\Omega$ ), luego se tiene que  $u_0 \geq 0$  y  $u \geq 0$ . Además  $(\alpha(x), g(x), h(x)) \in \text{adh}(\Omega)$ ,  $\forall x \in X$ .

Entonces, eligiendo esos valores de  $(p, q, r)$  tenemos

$$u_0 \alpha(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \geq 0, \quad \forall x \in X$$

lo que prueba que (2) tiene solución.

Veamos ahora la segunda afirmación. Supongamos que (2) tiene una solución que cumple la condición  $u_0 > 0$ . Para razonar por contradicción, vamos a suponer que (1) tiene solución, es decir, existe  $\tilde{x} \in X$  tal que

$$\alpha(\tilde{x}) < 0, \quad g(\tilde{x}) \leq 0, \quad h(\tilde{x}) = 0$$

De (2) tenemos que  $\underbrace{u_0 \alpha(\tilde{x})}_{<0} + \underbrace{u^T g(\tilde{x})}_{\leq 0} + \underbrace{v^T h(\tilde{x})}_{=0} \geq 0$ , lo que es una contradicción. Entonces (1) no tiene solución. ■

**Teorema 6.3.2 (Dualidad fuerte)** Sean  $X$ , no vacío y convexo y las funciones

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{convexa}$$

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{convexa}$$

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad \text{afín, } h(x) = Ax - b$$

Consideramos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \inf \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

y suponemos que se cumplen las siguientes hipótesis:

- (H1): existe  $\tilde{x} \in X$  tal que  $g(\tilde{x}) < 0$ ,  $h(\tilde{x}) = 0$  (interior relativo no vacío)  
 (H2):  $0 \in \text{int}(h(X))$  ( $h(X)$ : recorrido de la función  $h$ )

Entonces,

a) Se cumple la igualdad

$$\inf\{f(x) / x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = \sup\{\theta(u, v) / u \geq 0\}$$

b) Si el ínfimo es finito, entonces existe  $(\bar{u}, \bar{v})$ , con  $\bar{u} \geq 0$ , tal que

$$\sup\{\theta(u, v) / u \geq 0\} = \theta(\bar{u}, \bar{v})$$

c) Si el ínfimo es alcanzado en  $\bar{x}$ , factible, entonces se tiene que

$$\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$$

**Demostración.** Sea  $\gamma = \inf\{f(x) / x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ .

a) Si  $\gamma = -\infty$  entonces decimos que  $(P)$  es no acotado, luego  $\theta(u, v) = -\infty$ , para todo  $(u, v)$ ,  $u \geq 0$  (dualidad débil) y se cumple la igualdad.

En general, si  $\gamma$  es finito, consideremos el sistema

$$f(x) - \gamma < 0, g(x) \leq 0, h(x) = 0, x \in X$$

Por definición de  $\gamma$  este sistema no tiene solución, luego por el lema precedente, existe  $(u_0, u, v) \neq 0$ ,  $u \geq 0$  tal que

$$u_0(f(x) - \gamma) + u^T g(x) + v^T h(x) \geq 0, \forall x \in X \quad (*)$$

Se puede probar que  $u_0 > 0$ . En efecto, si  $u_0 = 0$  se tiene  $u^T g(x) + v^T h(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in X$ . La hipótesis (H1) nos permite elegir un  $\tilde{x} \in X$  tal que  $g(\tilde{x}) < 0$ ,  $h(\tilde{x}) = 0$ , lo que implica que  $u^T g(\tilde{x}) \geq 0$ , de donde  $u = 0$ .

Entonces tenemos que  $v^T h(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in X$ . Usando (H2), se puede decir que existe  $\bar{\lambda} > 0$  tal que

$$\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}[ : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } h(x) = -\lambda v$$

Luego,  $v^T(-\lambda v) \geq 0$ , de donde fluye que  $v = 0$  y eso implica una contradicción con el hecho que  $(u_0, u, v) \neq 0$ .

Dividiendo en (\*) por  $u_0$  y haciendo  $\bar{u} = u/u_0$ ,  $\bar{v} = v/u_0$  se obtiene

$$f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x) \geq \gamma, \quad \forall x \in X \quad (**)$$

Tomando ínfimo en el lado izquierdo, se tiene

$$\theta(\bar{u}, \bar{v}) = \inf_{x \in X} \{f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x)\} \geq \gamma$$

y por dualidad débil se deduce que  $\theta(\bar{u}, \bar{v}) = \gamma$ , luego  $(\bar{u}, \bar{v})$  resuelve el problema dual. Es decir,

$$\theta(\bar{u}, \bar{v}) = \sup\{\theta(u, v) / u \geq 0\} = \inf\{f(x) / x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$$

b) Esta parte quedó implícitamente establecida en la parte anterior al definir los vectores  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$ .

c) Sea  $\bar{x}$  el punto en que se alcanza el óptimo de (P), es decir,  $f(\bar{x}) = \gamma$ . De la expresión ya demostrada (\*\*):  $f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x) \geq \gamma$ ,  $\forall x \in X$ , obtenemos

$$f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) \geq \gamma$$

de donde fluye que  $\bar{u}^T g(\bar{x}) \geq 0$ , pues  $h(\bar{x}) = 0$ . De allí,  $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$ . ■

**Ejemplo 6.3.1** Consideremos el problema (ver Figura 6.1)

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 - x_2 \\ & x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \\ & (x_1, x_2) \in X = \{0, 1, 2, 3\}^2 \end{aligned}$$

La función dual es

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \text{mín}\{-x_1 - x_2 + u(x_1 + 2x_2 - 3) / (x_1, x_2) \in X\} \\ &= \text{mín}\{(u - 1)x_1 + (2u - 1)x_2 / (x_1, x_2) \in X\} - 3u \end{aligned}$$

Podemos ver los siguientes casos posibles:

$$\begin{aligned} u - 1 \geq 0 \wedge 2u - 1 \geq 0 &\Rightarrow \theta = -3u \\ u - 1 \geq 0 \wedge 2u - 1 < 0 &\Rightarrow \theta = 3u - 3 \\ u - 1 < 0 \wedge 2u - 1 \geq 0 &\Rightarrow \theta = -3 \\ u - 1 < 0 \wedge 2u - 1 < 0 &\Rightarrow \theta = 6u - 6 \end{aligned}$$

Entonces (ver Figura 6.2)

$$\theta(u) = \begin{cases} -6 + 6u & \text{si } 0 \leq u < 1/2 \\ -3 & \text{si } 1/2 \leq u < 1 \\ -3u & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

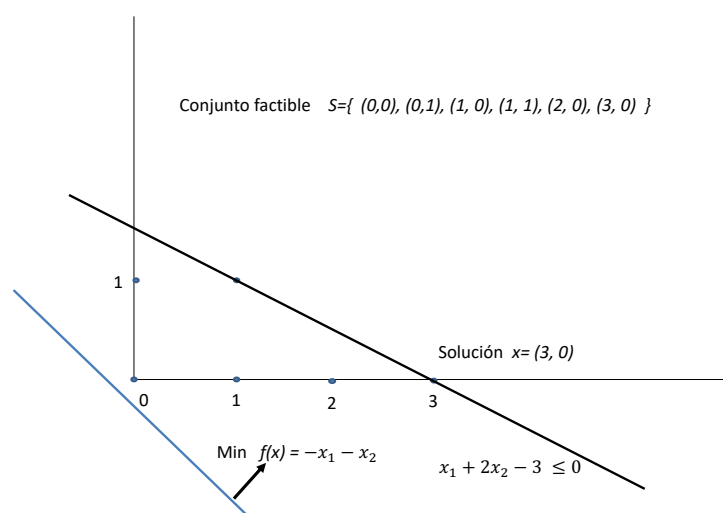


Figura 6.1: Problema (P)

La solución de (P) es  $x^* = (3,0)$ , con  $f^* = -3$  y la solución de (D) es  $u^* \in [1/2, 1]$ , con  $\theta^* = -3$ . La igualdad  $f^* = \theta^*$  ocurre en este caso, a pesar que no se cumple la hipótesis (H2) del teorema de dualidad fuerte.

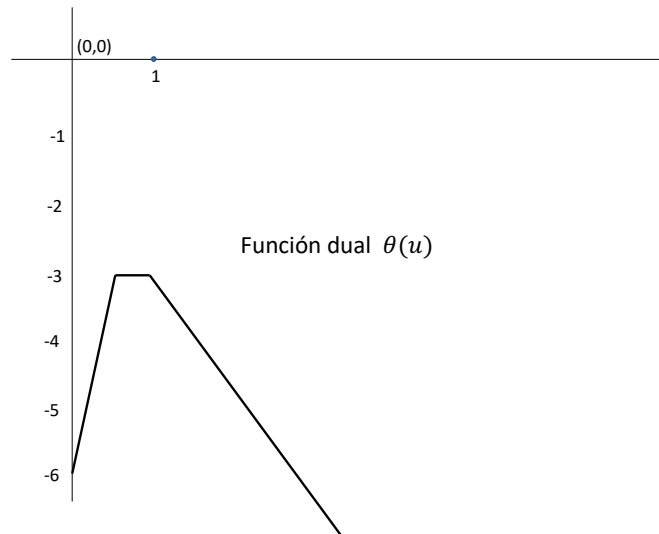


Figura 6.2: Problema (D)

Notar además que la función dual es cóncava, de acuerdo al teorema general siguiente, que se deja como ejercicio propuesto.

**Teorema 6.3.3** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y no vacío. Sean también  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , funciones continuas. Entonces la función  $\theta$ , definida por*

$$\theta(w) = \inf_{x \in X} \{f(x) + w^T \beta(x)\}$$

*es cóncava en  $\mathbb{R}^k$ .*

**Ejemplo 6.3.2** *De manera similar, se sugiere analizar el caso del ejemplo siguiente, graficando las funciones primal y dual.*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ & (x_1, x_2) \in X = \{(0, 0), (0, 4), (4, 4), (4, 0), (1, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$

*Entonces la función dual es*



$$\theta(v) = \begin{cases} -4 + 5v & \text{si } v \leq -1 \\ -8 + v & \text{si } -1 \leq v \leq 2 \\ -3v & \text{si } v \geq 2 \end{cases}$$

El valor de la solución de (P) es  $f^* = -3$  y la solución es  $x^* = (2, 1)$ . El valor de la solución de (D) es  $\theta^* = -6$  (la solución es  $v^* = 2$ ). Notar que en este caso existe lo que se denomina salto de dualidad, es decir,  $f^* > \theta^*$ . Se sugiere buscar una explicación a este hecho.

## 6.4. Puntos silla

En esta sección definiremos el concepto de punto silla y su relación con los conceptos de optimalidad, particularmente las condiciones de KKT. Trabajamos aquí con el par de problemas ya definidos

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{máx } & \theta(u, v) \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

y  $h$  no necesariamente afín.

### 6.4.1. Definición y existencia

**Teorema 6.4.1 (Punto silla)** Sea la función  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\varphi(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)$$

Si existen  $\bar{x} \in X$ ,  $(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{u} \geq 0$  tales que

$$\varphi(\bar{x}, u, v) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \varphi(x, \bar{u}, \bar{v}), \quad \forall x \in X, (u, v), u \geq 0 \quad (6.1)$$

entonces  $\bar{x}$ , y  $(\bar{u}, \bar{v})$  son óptimos respectivos de (P) y (D). Se llama **punto silla** a  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ .

Inversamente, si suponemos que

- $X$  es convexo,  $f$  y  $g$  son convexas
- $h$  es afín
- $0 \in \text{int}(h(X))$
- Existe  $\tilde{x} \in X$ , tal que  $g(\tilde{x}) < 0$ ,  $h(\tilde{x}) = 0$

entonces, si  $\bar{x}$  es óptimo de  $(P)$ , existe  $(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{u} \geq 0$  tal que se cumple la desigualdad (6.1).

**Demostración.** Supongamos que  $\bar{x}$ ,  $(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{u} \geq 0$  cumplen (6.1). La primera parte de esa doble desigualdad implica

$$u^T g(\bar{x}) + v^T h(\bar{x}) \leq \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}), \forall (u, v), u \geq 0 \quad (*)$$

El lado derecho es una constante, por lo tanto si fijamos  $v$ , se deduce que  $g(\bar{x}) \leq 0$ , puesto que si no fuese así el lado izquierdo sería no acotado superiormente.

Ahora bien, si fijamos  $u$ , podemos escribir

$$v^T h(\bar{x}) \leq \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) - u^T g(\bar{x}), \forall v$$

siendo el lado derecho una constante. De allí es evidente que  $h(\bar{x}) = 0$ , lo que muestra que  $\bar{x}$  es factible para  $(P)$ .

De la misma desigualdad (\*), obtenemos entonces que  $u^T g(\bar{x}) \leq \bar{u}^T g(\bar{x}) \leq 0$ ,  $\forall u \geq 0$ , lo que obviamente implica  $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$ .

Así,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) \\ &= \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \\ &\leq \varphi(x, \bar{u}, \bar{v}) \quad \forall x \in X \\ &= f(x) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Luego,

$$f(\bar{x}) \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x})\} = \theta(\bar{u}, \bar{v})$$

de donde, por dualidad débil, se tiene que  $f(\bar{x}) = \theta(\bar{u}, \bar{v})$ , lo que prueba la optimalidad respectiva de  $\bar{x}$  y  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

Inversamente, sea  $\bar{x}$  solución de (P). Entonces, por dualidad fuerte, existe  $(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{u} \geq 0$  tal que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \theta(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{u}^T g(\bar{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos la secuencia de desigualdades

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = \theta(\bar{u}, \bar{v}) &\leq f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x), \quad \forall x \in X \\ f(\bar{x}) + \underbrace{\bar{u}^T g(\bar{x})}_0 + \underbrace{\bar{v}^T h(\bar{x})}_0 &\leq f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x), \quad \forall x \in X \\ \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) &\leq \varphi(x, \bar{u}, \bar{v}) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

lo que demuestra la segunda desigualdad en (6.1).

Para ver la primera desigualdad, sean  $u \geq 0$ ,  $v \in \mathbb{R}^l$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}, u, v) &= f(\bar{x}) + \underbrace{u^T g(\bar{x})}_{\leq 0} + \underbrace{v^T h(\bar{x})}_0 \\ &\leq f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \underbrace{\bar{u}^T g(\bar{x})}_0 + \underbrace{\bar{v}^T h(\bar{x})}_0 \\ &= \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

### 6.4.2. Relación con la optimalidad

Para terminar este capítulo, entregamos un teorema que relaciona los puntos de KKT con los puntos silla. Usaremos la notación matricial compacta:

$$\begin{aligned} \nabla g(x) &= [\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)] \\ \nabla h(x) &= [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_l(x)] \end{aligned}$$

**Teorema 6.4.2 (Relación entre KKT y punto silla)** *Consideremos el conjunto factible  $S = \{x \in X / g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ , el problema*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ & x \in S \end{array}$$

y  $\bar{x} \in S$  que satisface las condiciones de KKT para (P), es decir, existen  $\bar{u} \geq 0, \bar{v}$ , tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{u} + \nabla h(\bar{x})\bar{v} &= 0 \\ \bar{u}^T g(\bar{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Supongamos que

- $f$  y  $g_i, i \in I$  son convexas
- $h_j$  es afín, para todo  $j$  tal que  $\bar{v}_j \neq 0$

Entonces  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  satisface la condición:

$$\varphi(\bar{x}, u, v) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \varphi(x, \bar{u}, \bar{v}), \quad \forall x \in X, (u, v), u \geq 0$$

Inversamente, si  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), \bar{u} \geq 0$ , satisface la condición de punto silla y además se cumple  $\bar{x} \in \text{int}(X) \neq \emptyset$ , entonces  $\bar{x}$  es punto factible para (P) y  $\bar{x}, (\bar{u}, \bar{v})$  satisfacen las condiciones de KKT.

**Demostración.** Supongamos que  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ , con  $\bar{x}$  factible y  $\bar{u} \geq 0$  satisface KKT. Por convexidad de  $f$  y  $g_i$  para  $i \in I$  y, dado que  $h_j$  es afín para  $\bar{v}_j \neq 0$ , tenemos,  $\forall x \in X$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \\ g_i(x) &\geq g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad i \in I \\ h_j(x) &= h_j(\bar{x}) + \nabla h_j(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad j = 1, \dots, l, \bar{v}_j \neq 0 \end{aligned}$$

Multiplicando las dos últimas expresiones respectivamente por  $\bar{u}_i$  y  $\bar{v}_j$  y luego sumando las tres expresiones y aplicando KKT se obtiene

$$\varphi(x, \bar{u}, \bar{v}) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), \quad \forall x \in X$$

Pero, dado que  $g(\bar{x}) \leq 0, h(\bar{x}) = 0$  y  $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$  se tiene que

$$f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}), \quad \forall \bar{u} \geq 0$$

o sea,

$$f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}), \quad \forall \bar{u} \geq 0$$

lo que implica

$$\varphi(\bar{x}, u, v) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), \quad \forall x \in X, u \geq 0, v \in \mathbb{R}^l$$

y muestra que  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  es punto silla.

Inversamente, supongamos que  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  es punto silla, con  $\bar{u} \geq 0$  y  $\bar{x} \in \text{int}(X)$ .

De la primera desigualdad,  $\varphi(\bar{x}, u, v) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ , para todo  $u \geq 0$  y  $v$ , se deduce fácilmente que  $g(\bar{x}) \leq 0$ ,  $h(\bar{x}) = 0$  y  $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$ . En particular eso prueba que  $\bar{x}$  es punto factible para  $(P)$ .

Ahora bien, dado que  $\varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \varphi(x, \bar{u}, \bar{v})$ ,  $\forall x \in X$ , entonces  $\bar{x}$  minimiza  $\varphi(x, \bar{u}, \bar{v})$ , sobre  $x \in X$ .

Dado dado que  $\bar{x} \in \text{int}(X)$ , entonces  $\nabla_x \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = 0$ , es decir,

$$\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{u} + \nabla h(\bar{x})\bar{v} = 0$$

lo que termina la demostración. ■

# Capítulo 7

## Algoritmos para programación no lineal

### 7.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos algunos métodos numéricos para la resolución del problema

$$\begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & x \in S \end{aligned}$$

donde la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es en general diferenciable (en algunos casos, puede ser necesario imponer condiciones adicionales) y el conjunto  $S$  es un convexo no vacío en  $\mathbb{R}^n$ . En el caso que  $S = \mathbb{R}^n$  se habla de **Optimización sin restricciones**.

Aunque el conjunto  $S$  puede tener naturaleza bastante variable y general, en este capítulo consideramos solamente el caso en que  $S$  puede ser descrito mediante un conjunto de igualdades y desigualdades, es decir,

$$\begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

en que normalmente suponemos que tanto  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  como  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  son diferenciables. Esto se denomina **Optimización con restricciones**.

La resolución numérica de estos problemas será abordada siguiente un esquema iterativo:

dado un punto de partida  $x_0 \in S$  se construye una sucesión  $\{x_k\}$ , contenida en  $S$ , según la fórmula

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

donde  $d_k$  es una dirección de descenso (es decir,  $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$ ) y  $\lambda_k$  es un paso, que satisface

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k + \lambda d_k) \quad \forall \lambda \geq 0, \quad x_k + \lambda d_k \in S$$

Ciertamente, el valor de  $\lambda_k$  podría no ser único. Otra posibilidad es que  $f(x_k + \lambda d_k)$  diverja a  $-\infty$  cuando  $\lambda$  tiende a infinito y se cumple  $x_k + \lambda d_k \in S$ , para todo  $\lambda \geq 0$ . En ese caso, el problema ( $P$ ) es no acotado.

**Notar** que esa no es la única forma de ser no acotado..., mirar el ejemplo:  $\min \log(x)$ , en  $S = ]0, 1]$ , caso en el cual  $f(x_k + \lambda d_k) \rightarrow -\infty$  cuando se elige  $x_k = 1$ ,  $d_k = -1$  y  $\lambda \rightarrow 1^-$ .

Dada la dirección  $d_k$ , el problema de encontrar el paso  $\lambda_k$  es un problema de minimización unidimensional

$$(L) \quad \begin{aligned} &\min \varphi(\lambda) \\ &\lambda \in [0, \bar{\lambda}_k] \end{aligned}$$

en que  $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$  y  $\bar{\lambda}_k = \sup\{\lambda / x_k + \lambda d_k \in S\}$ . Puede ocurrir que  $\bar{\lambda}_k \rightarrow +\infty$ .

La dirección  $d_k$  puede ser elegida de diversas maneras, según veremos en las secciones siguientes. A modo de ejemplo, en el caso no restringido, se puede elegir simplemente

$$d_k = -\nabla f(x_k),$$

pues si  $x_k$  no es punto estacionario ( $\nabla f(x_k) \neq 0$ ), entonces  $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$ . Esta es la base del método del gradiente, que veremos un poco después.

Más en general, si  $A$  es una matriz definida positiva, entonces es fácil probar que

$$d_k = -A \nabla f(x_k)$$

es también una dirección de descenso, puesto que  $\nabla f(x_k)^T d_k = -\nabla f(x_k)^T A \nabla f(x_k) < 0$ , si  $\nabla f(x_k) \neq 0$ . Esto justifica el método de Newton, en el cual se elige

$$d_k = -H(x_k)^{-1} \nabla f(x_k),$$

siendo  $H_k = H(x_k) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x_k)$  la matriz Hessiana de  $f$ , evaluada en  $x_k$ . Este método es muy bueno cuando la función  $f$  es (estrictamente) convexa.

## 7.2. Optimización sin restricciones

### 7.2.1. Método del gradiente

También conocido como **método de Cauchy** o del **descenso más pronunciado**, está diseñado para resolver numéricamente el problema irrestricto

$$(P) \quad \text{mín } f(x)$$

Una propiedad interesante de la dirección del gradiente es que ella es la de máximo descenso en el punto  $x_k$ , en el sentido que es solución del problema

$$\begin{aligned} \text{mín } & \nabla f(x_k)^T d \\ & \|d\| \leq 1 \end{aligned}$$

En efecto, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede decir que  $\nabla f(x_k)^T d \geq -\|\nabla f(x_k)\| \|d\|$  y la igualdad se alcanza en

$$d = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$$

Esto sugiere usar la dirección  $d_k = -\nabla f(x_k)$  o bien  $d_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$  como dirección de búsqueda (da lo mismo cualquiera de las dos), es decir, el algoritmo está dado por la fórmula iterativa:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) \tag{7.1}$$

donde el paso  $\lambda_k$  es la solución del problema unidimensional (L). El algoritmo correspondiente puede entonces presentarse de la manera siguiente:

#### Algoritmo del gradiente

[0] Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $k = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

[1] Si  $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ , entonces detener el proceso, pues  $x_k$  es una buena aproximación a un punto estacionario de (P). Si no, elegir la dirección

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

e ir a [2]



[2] Encontrar  $\lambda_k$  que minimiza  $f(x_k - \lambda \nabla f(x_k))$ ,  $\lambda \geq 0$  (es decir, resolver (L))

[3] Actualizar

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k),$$

hacer  $k \leftarrow k + 1$  e ir a [1]

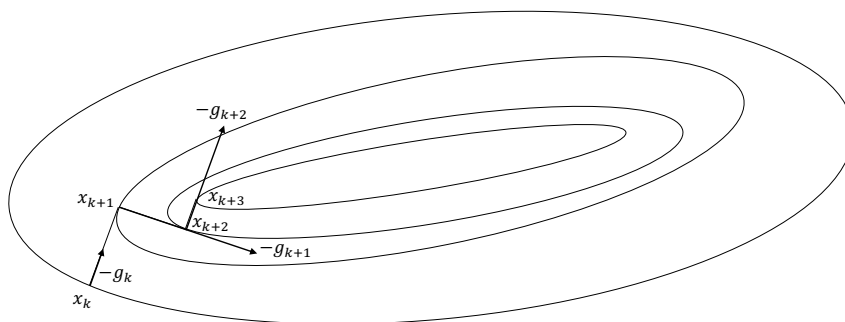


Figura 7.1: Esquema de un método iterativo usando direcciones, sin restricciones.

Se puede ver que en el caso diferenciable se caracteriza  $\lambda_k$  mediante

$$\varphi'(\lambda_k) = \nabla f(x_k + \lambda_k d_k)^T d_k = \nabla f(x_{k+1})^T d_k = 0$$

es decir, la dirección de búsqueda es ortogonal al gradiente evaluado en  $x_{k+1}$ .

Particularmente, si se trata del método de Cauchy, quiere decir que la secuencia de direcciones  $\{-\nabla f(x_0), -\nabla f(x_1), -\nabla f(x_2), \dots, \}$  es ortogonal, a pares sucesivos. Más en general, se puede pensar en una secuencia de direcciones construida según ese principio de ortogonalidad  $d_k^T d_{k+1} = 0$  que genere un buen algoritmo convergente. Por ejemplo, en el caso que  $f$  sea estrictamente convexa, simplemente elegir la secuencia siguiendo los ejes coordenados, de manera que  $d_k = \pm e_{k+1}$ , según cuál sea de descenso,  $k = 0, \dots, n - 1$ . Luego repetir con  $e_1$  hasta  $e_n$  y así sucesivamente.

## 7.2.2. Caso cuadrático

Consideremos el caso

$$f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x,$$

con  $Q$  (simétrica) definida positiva.

En lo que sigue denotaremos  $g_k = c + Qx_k$  al gradiente de  $f$  evaluado en  $x_k$ . Entonces la dirección del gradiente está dada por  $d_k = -g_k$ .

Se necesita determinar el paso en cada iteración. Recordemos que, de la definición del problema ( $L$ ), debemos minimizar la función

$$\varphi(\lambda) = f(x_k - \lambda g_k),$$

la cual es convexa. Entonces se puede determinar  $\lambda_k$  resolviendo la ecuación  $\varphi'(\lambda) = 0$ , es decir,

$$0 = \varphi'(\lambda) = -\nabla f(x_k - \lambda g_k)^T g_k = -[c + Q(x_k - \lambda g_k)]^T g_k = -g_k^T g_k + \lambda g_k^T Q g_k$$

de donde  $\lambda_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k}$ .

Se obtiene entonces la fórmula iterativa (explícita) del método del gradiente en el caso cuadrático definido positivo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T Q g_k} g_k.$$

Este método es convergente a un punto estacionario de  $f$ , bajo hipótesis bastante generales. Demostraremos esta convergencia solamente en el caso de funciones cuadráticas definidas positivas, como la del ejemplo anterior.

Para esto, definamos una función auxiliar que mide el error de una estimación, es decir, la distancia entre un punto dado y el punto estacionario,

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} (x - x^*)^T Q (x - x^*) = \frac{1}{2} \|x - x^*\|_Q^2,$$

donde  $x^*$  es solución óptima del problema cuadrático irrestricto, es decir,  $x^* = -Q^{-1}c$ .

Notar que este es esencialmente el cuadrado del error de  $x$  con respecto a  $x^*$ , usando la

norma inducida por la matriz  $Q$ . Observemos además que las funciones  $f$  y  $e$  difieren solamente en una constante, puesto que

$$e(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^{*T}Qx^*,$$

lo que significa que minimizar  $f$  es equivalente a minimizar  $e$ , cuyo valor mínimo es obviamente cero, dado que  $Q$  es definida positiva.

**Lema 7.2.1**  $e(x_{k+1}) = \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T Q g_k)(g_k^T Q^{-1} g_k)}\right] e(x_k)$

**Demostración.** De la definición de  $e$  se tiene que

$$e(x_{k+1}) = \frac{1}{2}(x_{k+1} - x^*)^T Q (x_{k+1} - x^*) = \frac{1}{2}(x_k - \lambda_k g_k - x^*)^T Q (x_k - \lambda_k g_k - x^*).$$

Notando que  $Q(x_k - x^*) = g_k$  y que  $e(x_k) = \frac{1}{2}g_k^T Q^{-1} g_k$  se tiene

$$\begin{aligned} e(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} [(x_k - x^*)^T Q (x_k - x^*) + \lambda_k^2 g_k^T Q g_k - 2\lambda_k (x_k - x^*)^T Q g_k] \\ &= e(x_k) + \frac{\lambda_k^2}{2} g_k^T Q g_k - \lambda_k g_k^T g_k \\ &= e(x_k) - \frac{(g_k^T g_k)^2}{2g_k^T Q g_k} \\ &= \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T Q g_k)(g_k^T Q^{-1} g_k)}\right] e(x_k), \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

Este lema permite dar una tasa de convergencia del método del gradiente, en el caso de funciones cuadráticas definidas positivas. Para esto, es necesario recordar una propiedad de las matrices definidas positivas, conocida como desigualdad de Kantorovich: Sea  $Q$  una matriz definida positiva y sean  $\lambda_m$  y  $\lambda_M$  sus valores propios más pequeño y más grande respectivamente. Entonces se cumple:

$$\frac{(u^T u)^2}{(u^T Q u)(u^T Q^{-1} u)} \geq \frac{4\lambda_m \lambda_M}{(\lambda_m + \lambda_M)^2} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$$

Aplicando esta desigualdad al lema precedente (bajo el supuesto evidente que  $g_k \neq 0$ ), tenemos que

$$e(x_{k+1}) \leq \left[1 - \frac{4\lambda_m \lambda_M}{(\lambda_m + \lambda_M)^2}\right] e(x_k),$$

es decir,

$$e(x_{k+1}) \leq \left[ \frac{\lambda_M - \lambda_m}{\lambda_M + \lambda_m} \right]^2 e(x_k).$$

Si denotamos  $\rho = \left[ \frac{\lambda_M - \lambda_m}{\lambda_M + \lambda_m} \right] \in [0, 1[$ , entonces

$$e(x_{k+1}) \leq \rho^2 e(x_k),$$

o bien

$$\|x_{k+1} - x^*\|_Q \leq \rho \|x_k - x^*\|_Q$$

lo que implica que  $e(x_k) \rightarrow 0$ , si  $k \rightarrow \infty$ . Es decir,  $x_k \rightarrow x^*$ , si  $k \rightarrow \infty$ .

Se puede ver que si la matriz  $Q$  es diagonal, entonces los dos valores propios extremos coinciden y se tiene que  $e(x_1) = 0$ , cualquiera que sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , lo que significa que el método converge en una iteración. Si no, la velocidad de convergencia depende la diferencia entre  $\lambda_M$  y  $\lambda_m$ , es decir, de la excentricidad de la forma cuadrática. Esto muestra que el método del gradiente converge **linealmente** en este caso (cuadrático definido positivo), según la definición que damos a continuación.

**Definición 7.2.1** Si  $\{x_k\}$  es una sucesión convergente a  $\bar{x}$ , entonces

- $\{x_k\}$  converge **linealmente** si existen  $\rho \in ]0, 1[$  y  $k_0$  tales que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \rho \|x_k - \bar{x}\|, \quad \forall k \geq k_0.$$

- $\{x_k\}$  converge **superlinealmente** si existen  $\{\beta_k\} \subset \mathbb{R}_+$  con  $\beta_k \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ , y  $k_0$  tales que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \beta_k \|x_k - \bar{x}\|, \quad \forall k \geq k_0.$$

- $\{x_k\}$  converge **cuadráticamente** si existen  $\beta \in \mathbb{R}_+$  y  $k_0$  tales que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \beta \|x_k - \bar{x}\|^2, \quad \forall k \geq k_0.$$

**Proposición 7.2.1** Convergencia cuadrática  $\implies$  convergencia superlineal  $\implies$  convergencia lineal.

### 7.2.3. Método de Newton

La idea del método de Newton es relativamente simple: se aproxima localmente la función a minimizar mediante una función cuadrática y luego se determina el mínimo de esta aproximación. Dicho punto es una aproximación del mínimo de  $f$ , construyendo así un método iterativo. Sea entonces  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^2$  y  $q$  la aproximación cuadrática, en un entorno de  $x_k$ ,

$$q(x) = f(x_k) + g_k^T(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k(x - x_k)$$

donde  $g_k = \nabla f(x_k)$  y  $H_k = H(x_k)$  es la matriz hessiana de  $f$  evaluada en  $x_k$ .

Una condición necesaria de mínimo de  $q$  es que  $\nabla q(x) = 0$ , es decir,

$$g_k + H_k(x - x_k) = 0$$

luego,

$$x = x_k - H_k^{-1}g_k$$

siempre que  $H_k^{-1}$  exista. Bajo el supuesto que  $q$  aproxima bien a  $f$ , se puede asumir que  $x$  aproxima bien al mínimo de  $f$  (pero esto podría estar lejos de la realidad). Esto sugiere el método (de Newton):

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1}g_k.$$

**Ejemplo 7.2.1** *Veamos el caso simple (P)  $\min f(x)$ , con  $f(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$  (campana de Gauss invertida). La formula de Newton aplicada a este caso es*

$$x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1}f'(x_k) = -\frac{2x_k^3}{1 - 2x_k^2}.$$

*Entonces, se observa que si  $|x_0| < 1/2$ , se tiene que  $\{x_k\}$  converge a cero, que es la solución del problema (P).*

*Si se parte de un punto tal que  $|x_0| = 1/2$ , entonces  $x_1 = -x_0$ ,  $x_2 = -x_1$ ,  $x_3 = -x_2$  y así sucesivamente, es decir, la sucesión oscila sin converger.*

*Si se parte de un punto tal que  $x_0 > 1/2$  o bien  $x_0 < -1/2$ , entonces la sucesión diverge a  $+\infty$  o bien  $-\infty$ , según el caso.*

*Se ha detectado así una región de convergencia del método, dada por la bola abierta  $B(0, \frac{1}{2})$ .*

Se sugiere, como ejercicio, analizar similarmente el caso (en dos variables)  $f(x, y) = -\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{2}$  y describir la región de convergencia. Damos a continuación, sin demostración, el teorema de convergencia (local) del algoritmo de Newton.

**Teorema 7.2.1** Sean  $f \in C^2$  y  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , tales que  $\nabla f(x^*) = 0$  y  $H(x^*)$  es definida positiva. Entonces existe  $r > 0$ , tal que si  $x_0 \in B(x^*, r)$ , el algoritmo

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1}g_k, \quad k \geq 0$$

converge a  $x^*$ .

### Velocidad de convergencia del método de Newton

En lo que sigue usaremos la definición de norma de una matriz:

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \{\|Av\|\}$$

la que, en particular, satisface la desigualdad  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ .

Bajo las hipótesis del teorema precedente, podemos escribir

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - H_k^{-1}g_k \\ &= H_k^{-1} [H_k(x_k - x^*) - (g_k - g^*)] \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde  $g^* = \nabla f(x^*) = 0$ .

Como  $f \in C^2$ , existen  $\mu > 0$  y  $r > 0$  tales que

$$\|H(x)^{-1}\| \leq \mu, \quad \forall x \in B(x^*, r)$$

luego, existe  $k_0$  tal que para  $k \geq k_0$ , y usando (7.2) se cumple

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &= \|H_k^{-1} [H_k(x_k - x^*) - (g_k - g^*)]\| \\ &\leq \mu \| [H_k(x_k - x^*) - (g_k - g^*)] \| \\ &= \mu \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H(x_k)(x_k - x^*)\| \end{aligned} \quad (7.3)$$

Usando el teorema del valor medio, tenemos que

$$\nabla f(x_k) = \nabla f(x^*) + H(x_k)(x_k - x^*) + \int_0^1 [H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)] (x_k - x^*) d\lambda$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H(x_k)(x_k - x^*)\| &\leq \|x_k - x^*\| \int_0^1 \|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\| d\lambda \\
&\leq \|x_k - x^*\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\|\} \\
&= \theta_k \|x_k - x^*\|
\end{aligned} \tag{7.4}$$

siendo  $\theta_k = \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\|\} \geq 0$  finito, pues  $H$  es continua, dado que  $f \in C^2$ .

De (7.3), se obtiene entonces

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \mu \theta_k \|x_k - x^*\|.$$

Como evidentemente  $\mu \theta_k \rightarrow 0^+$ , si  $k \rightarrow \infty$ , entonces la convergencia de  $\{x_k\}$  a  $x^*$  es **superlineal**.

Esta convergencia puede ser cuadrática, en el caso que la matriz hessiana  $H$  es de Lipschitz, es decir, existe  $L$  tal que

$$\|H(u) - H(v)\| \leq L \|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

En ese caso,

$$\|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\| \leq L \|\lambda(x_k - x^*)\|$$

y la desigualdad (7.4) puede ser recalculada:

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) - H(x_k)(x_k - x^*)\| &\leq \|x_k - x^*\| \int_0^1 \|H(x^* + \lambda(x_k - x^*)) - H(x^*)\| d\lambda \\
&\leq L \|x_k - x^*\| \int_0^1 \|\lambda(x_k - x^*)\| d\lambda \\
&= \frac{L}{2} \|x_k - x^*\|^2
\end{aligned}$$

Aplicando a (7.3),

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{\mu L}{2} \|x_k - x^*\|^2,$$

lo cual muestra que el método de Newton tiene, en este caso, convergencia **cuadrática**.

### Algoritmo de Newton, para funciones de clase $C^2$

- [0] Sea  $\varepsilon > 0, k = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$
- [1] Elegir  $d_k$  mediante  $H_k d_k = -g_k$ , donde  $H_k = H(x_k)$  y  $g_k = \nabla f(x_k)$ .
- [2] Hacer  $x_{k+1} = x_k + d_k$
- [3] Si  $\|g_{k+1}\| \leq \varepsilon$ , parar. Si no, hacer  $k \leftarrow k + 1$  y volver a [1]

Debemos notar que este algoritmo puede no converger, dependiendo del punto de partida, tal como se ha visto en el ejemplo antes mostrado. Una forma de evitar o al menos aminorar este problema del método es usar la dirección  $d_k$  como dirección de búsqueda lineal y minimizar en cada iteración sobre la variedad lineal determinada por esa dirección. Esto permite modificar el método como se indica a continuación.

### Método de Newton con paso

Como vimos antes, si  $H_k$  es definida positiva entonces  $d_k = -H_k^{-1}g_k$  es dirección de descenso. Una modificación que ayuda a acelerar la convergencia es incorporar un paso en cada iteración. Esto es, reemplazar la etapa [2] por

- [2] Hacer  $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ , donde  $t_k$  resuelve el problema de minimización unidimensional:

$$\text{mín } f(x_k + t d_k), \quad t \geq 0$$

Al usar esta estrategia, aparece la necesidad de minimizar la función (de una variable)  $\varphi(t) = f(x_k + t d_k)$ , para  $t \geq 0$ . Este subproblema es descrito más adelante, en la Sección 7.4.

## 7.3. La trayectoria del gradiente

El método del gradiente elige, a partir de  $x_k$ , una dirección ortogonal a la curva de nivel de la función  $f$  en ese punto. En ese sentido corresponde a una discretización de la trayectoria dada por la ecuación diferencial ordinaria

$$(T) \quad \dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_k$$

la cual, bajo ciertas condiciones de regularidad, satisface  $x(t) \rightarrow x^*$  si  $t \rightarrow \infty$ , siendo  $x^*$  un punto estacionario de  $f$ , como se muestra en la Figura 7.2.



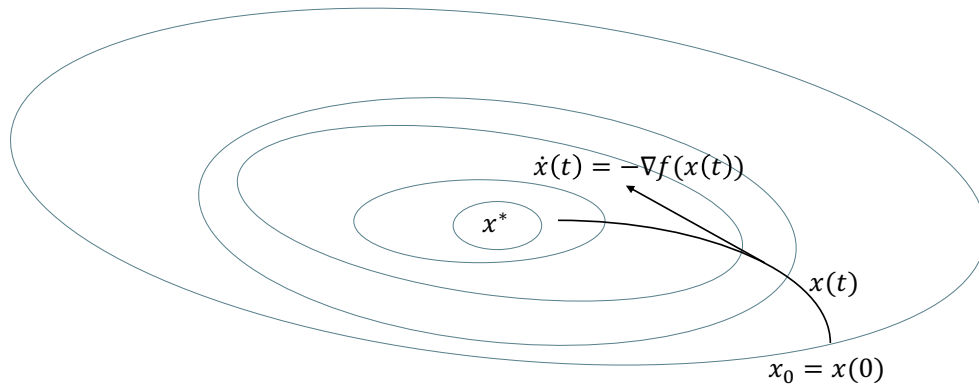


Figura 7.2: Trayectoria del gradiente.

La ecuación (T) puede ser resuelta de manera explícita en ciertos casos especiales, como es el caso de una función  $f$  cuadrática. Pero, en general, supongamos que la matriz Hessiana de  $f$  evaluada en  $x_k$  es definida positiva y aproximemos la ecuación mediante desarrollo del lado derecho hasta el segundo orden

$$\nabla f(x(t)) = \nabla f(x_k) + H(x_k)(x(t) - x_k)$$

es decir la ecuación diferencial (T) se aproxima mediante

$$\dot{x}(t) = -H_k x(t) + H_k x_k - g_k, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_k$$

donde  $H_k = H(x_k)$  y  $g_k = \nabla f(x_k)$ .

La solución de esta ecuación es

$$x(t) = x_k + (e^{-tH_k} - I)H_k^{-1}g_k, \quad t \geq 0 \tag{7.5}$$

Para valores pequeños de  $t$  se puede ver que, reemplazando  $e^{-tH_k}$  por  $I - tH_k$ , la trayectoria (7.5) se aproxima mediante

$$x(t) = x_k - tg_k, \quad t \geq 0$$

que corresponde a la dirección del algoritmo del gradiente. Por otro lado, para valores de  $t$  tendiendo a infinito, la trayectoria (7.5) tiende a

$$x(\infty) = x_k - H_k^{-1}g_k$$

que corresponde al método de Newton con paso 1.

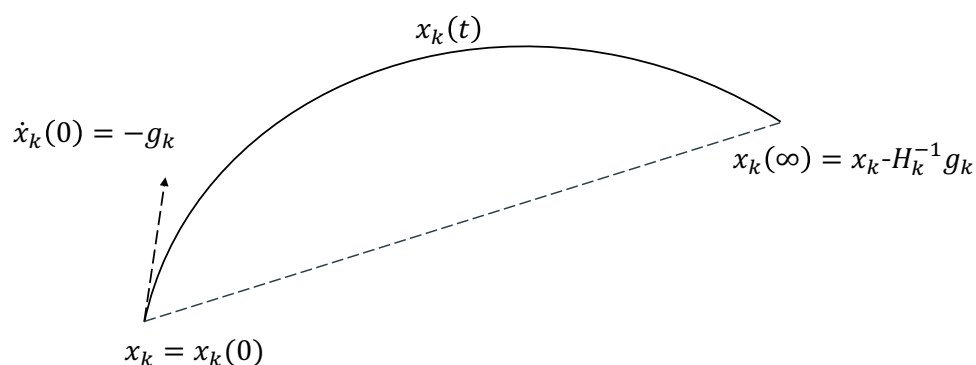


Figura 7.3: Búsqueda sobre trayectoria no lineal

Entonces esto sugiere un algoritmo de búsqueda sobre arcos en lugar de búsqueda sobre direcciones, con paso en el intervalo  $[0, \infty[$ . Cada arco es una especie de compromiso entre la dirección del gradiente y el paso de Newton clásico.

### Algoritmo trayectorial

[0] Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $k = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

[1] Si  $\|g_k\| < \varepsilon$ , entonces detener el proceso, pues  $x_k$  es una buena aproximación a un punto estacionario de  $(P)$ . Si no, elegir el arco dado por

$$x_k(t) = x_k - S_k(t)g_k$$

donde  $S_k(t) = -(e^{-tH_k} - I)H_k^{-1}$

[2] Encontrar  $t_k$  que minimiza  $f(x_k(t))$ ,  $t \geq 0$

[3] Actualizar

$$x_{k+1} = x_k - S_k(t_k)g_k$$

hacer  $k \leftarrow k + 1$  e ir a [1]

Notar que  $S_k(t)$  es una matriz definida positiva, para todo  $t > 0$ . Para determinar el paso en este algoritmo se debe resolver también un subproblema de minimización unidimensional, igual que en los algoritmos del gradiente y Newton. Esto se analiza en la Sección 7.4 siguiente.

Pero podemos aún decir algo más sobre la trayectoria de búsqueda del nuevo punto a partir de  $x_k$  (paso [2]) del algoritmo). Si se expresa la matriz  $H_k$  en su forma espectral  $U_k D_k U_k^T$  (donde  $D_k$  es la diagonal de los valores propios y  $U_k$  contiene en sus columnas los vectores propios ortonormalizados correspondientes), se puede escribir

$$S_k(t) = -U_k(e^{-tD_k} - I)D_k^{-1}U_k^T$$

es decir

$$x_k(t) = x_k + U_k(e^{-tD_k} - I)D_k^{-1}U_k^T g_k$$

Entonces, si denotamos  $u_i^k$  para  $i = 1, \dots, n$  a las columnas de  $U_k$  y  $\lambda_i^k$  a los vectores propios correspondientes, se tiene

$$x_k(t) = x_k + \sum_{i=1}^n \frac{e^{-t\lambda_i^k} - 1}{\lambda_i^k} u_i^k u_i^{kT} g_k$$

Esto permite extender el método trayectorial al caso en que la matriz  $H_k$  es semidefinida positiva. Usando el hecho que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t\lambda} - 1}{\lambda} = -t$$

se puede escribir

$$x_k(t) = x_k + \sum_{i/\lambda_i^k > 0} \frac{e^{-t\lambda_i^k} - 1}{\lambda_i^k} u_i^k u_i^{kT} g_k - t \sum_{i/\lambda_i^k = 0} u_i^k u_i^{kT} g_k$$

Se puede advertir que el vector  $d_i^k = -u_i^k u_i^{kT} g_k$  corresponde a una dirección de descenso de  $f$  en  $x_k$ , en el sentido que

$$g_k^T d_i^k \leq 0$$

puesto que la matriz  $u_i^k u_i^{kT}$  es semidefinida positiva (además tiene rango 1). Así, se puede expresar

$$x_k(t) = x_k + \sum_{i/\lambda_i^k > 0} \eta_i^k(t) d_i^k + t \sum_{i/\lambda_i^k = 0} d_i^k$$

con

$$\eta_i^k(t) = -\frac{e^{-t\lambda_i^k} - 1}{\lambda_i^k}$$

lo que dice que la trayectoria  $x_k(t)$  es esencialmente una combinación lineal positiva de direcciones de descenso.

## 7.4. Métodos de paso (o minimización unidimensional)

En general, en este tipo de métodos se debe realizar una minimización unidimensional en cada iteración. Es decir, tal como se dijo antes, resolver el problema

$$(L) \quad \begin{aligned} &\text{mín } \varphi(\lambda) \\ &\lambda \in [0, \infty[ \end{aligned}$$

en que  $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$ . En ciertos casos, dependiendo de las propiedades de la función  $f$ , puede ser posible encontrar el mínimo unidimensional resolviendo directamente la ecuación  $\varphi'(\alpha) = 0$ , es decir la ecuación  $\nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k = 0$ , pero lo más frecuente es verse obligado a aproximar el mínimo numéricamente mediante algún procedimiento como el denominado "método de dicotomía", que exponemos a continuación.

Sunpongamos que se sabe que el mínimo de  $\varphi$  está en algún intervalo  $[0, \bar{\lambda}_k]$ . Esto puede ocurrir en casos en que se sabe que la función es **unimodal**, es decir, que posee un solo valor  $\lambda_k$  que resuelve (L). Una función unimodal es lo que se conoce como función estrictamente casi-convexa, definida a continuación.

**Definición 7.4.1** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $S$  es convexo. Entonces

- Una función  $f$  se dice **casi-convexa** si, para todo  $x_1, x_2 \in S$ ,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

- Una función  $f$  se dice **estrictamente casi-convexa** si, para todo  $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$ ,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \forall \lambda \in ]0, 1[$$

**Observación 7.4.1** *Notemos que:*

- Si la función  $f$  es casi convexa, entonces el conjunto de valores que minimiza  $f$  es un conjunto convexo.
- Es claro que si  $f$  es casi-convexa entonces  $\varphi$  también lo es. Más en general,  $\varphi$  hereda todas las propiedades de  $f$ .
- Si  $d_k$  es una dirección de descenso, entonces es claro que  $\varphi'(0) < 0$ . En efecto, se puede advertir que en el caso diferenciable:  $\varphi'(\lambda) = \nabla f(x_k + \lambda d_k)^T d_k$ . Entonces, evaluando en el cero,  $\varphi'(0) = \nabla f(x_k)^T d_k = f'(x_k; d_k) < 0$ .

**Teorema 7.4.1** *Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente casi-convexa, que tiene un mínimo global en el intervalo  $[a, b]$ , entonces para  $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$  tales que  $\alpha_1 < \alpha_2$  se tiene:*

- i)  $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\alpha) \geq \varphi(\alpha_2), \quad \alpha \in [a, \alpha_1[$*
- ii)  $\varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\alpha) \geq \varphi(\alpha_1), \quad \alpha \in ]\alpha_2, b]$*

**Demostración.** Se deja propuesto como ejercicio. ■

Este teorema permite afirmar lo siguiente:

- a)  $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$ , entonces el nuevo intervalo de confianza para el mínimo es  $[\alpha_1, b]$ .
- b)  $\varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2)$ , entonces el nuevo intervalo de confianza para el mínimo es  $[a, \alpha_2]$ .

Usando estas propiedades se puede proponer el método de búsqueda unidimensional que describimos a continuación.

### 7.4.1. Método de dicotomía

Consideremos de nuevo el problema,

$$(L) \quad \begin{array}{l} \text{mín } \varphi(t) \\ t \in [a, b] \end{array}$$

donde  $\varphi$  es unimodal.

[0] Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho > 0$  (precisión),  $j = 1$ ,  $[a_1, b_1]$  intervalo inicial (por ejemplo, puede ser  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ).

[1] Si  $b_j - a_j < \rho$ , detenerse y estimar la solución de  $(L)$  mediante  $t_k = (a_j + b_j)/2$ . El error máximo de esa aproximación es  $\rho/2$ .

Si  $b_j - a_j \geq \rho$ , sean

- $\alpha_1 = \frac{a_j + b_j}{2} - \varepsilon$

- $\alpha_2 = \frac{a_j + b_j}{2} + \varepsilon$

[2] Si  $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$  hacer  $a_{j+1} = \alpha_1$  y  $b_{j+1} = b_j$

Si  $\varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2)$  hacer  $a_{j+1} = a_j$  y  $b_{j+1} = \alpha_2$

[3]  $j \leftarrow j + 1$  y volver a [1]

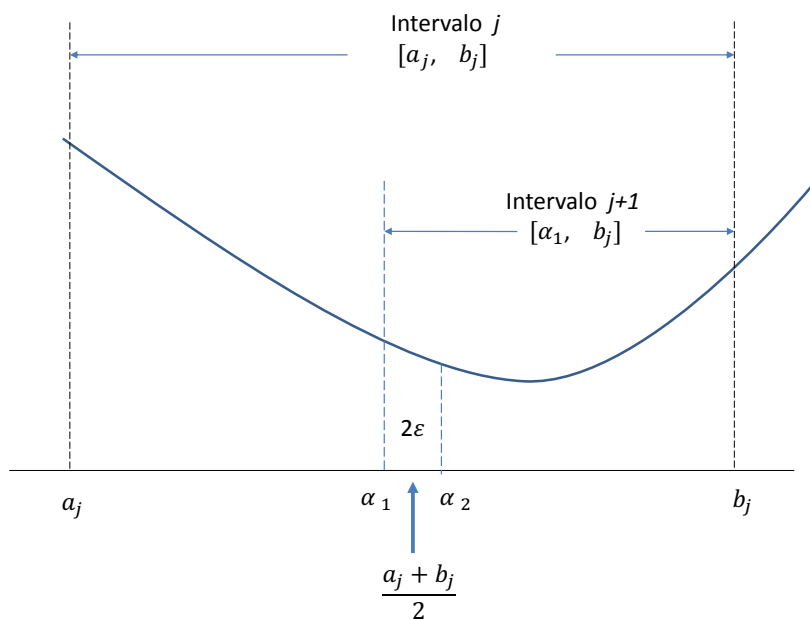


Figura 7.4: Esquema del método de dicotomía.

**Observación 7.4.2** Como ejercicio, probar que este método requiere que  $2\varepsilon < \rho$  y también probar que este procedimiento de determinación de paso produce una secuencia anidada de intervalos cerrados, tal que

$$b_{j+1} - a_{j+1} = \frac{1}{2^j}(b_1 - a_1) + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^j}\right),$$

que converge a un intervalo de ancho  $2\varepsilon$ , el cual contiene un punto que es solución de  $(L)$ .

Este procedimiento de minimización unidimensional es muy rápido, pero está limitado a casos en que la función es unimodal. En general, la minimización de funciones de una variable es un problema no trivial, especialmente si no se conoce alguna propiedad general de la función.

Siguiendo con el caso unimodal, resta por saber cómo determinar un intervalo inicial  $[a, b]$  para partir este método, en el caso de la función  $\varphi(t) = f(x_k + td_k)$ . Sobre la base que  $d_k$  es dirección de descenso se tiene que  $\varphi'(0) < 0$  (en efecto,  $\varphi'(t) = \nabla f(x_k + td_k)^T d_k$ ) y si existe un punto que minimiza  $\varphi$  en  $[0, \infty[$ , se puede aplicar el procedimiento simple siguiente:

[0] Sea  $h > 0$ , en general relativamente pequeño.

Si  $\varphi(0) < \varphi(h)$  elegir  $[a, b] = [0, h]$ .

Si no, ir a [1].

[1] Buscar  $p$ , entero positivo, tal que

$$\varphi(0) \geq \varphi(h) \geq \dots \geq \varphi((p-1)h) \geq \varphi(ph)$$

y

$$\varphi(ph) < \varphi((p+1)h),$$

entonces elegir como intervalo inicial:

$$[a, b] = [(p-1)h, (p+1)h].$$

## 7.4.2. Paso de Armijo

Este paso o método de búsqueda unidimensional está basado en la idea de garantizar un suficiente decrecimiento de la función objetivo en cada iteración, en lugar de aproximar el mínimo, como en el método anterior. La idea es usar el hecho que la derivada de la función  $\varphi$  en el punto cero es negativa (pues la dirección de búsqueda  $d_k$  es de descenso en ese punto).

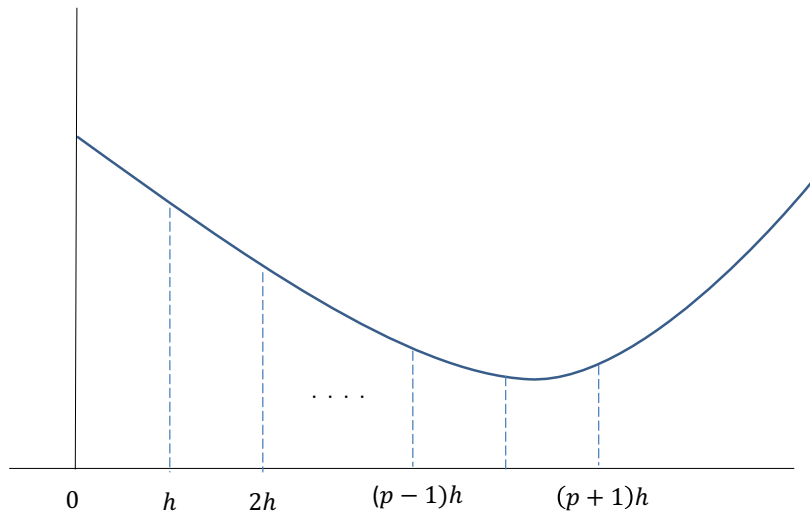


Figura 7.5: Esquema de determinación del intervalo de confianza inicial.

Se elige entonces un valor  $\sigma \in ]0, 1[$  y se usa la recta de pendiente  $\sigma\varphi'(0)$  para acotar por arriba el valor de la función y sobre esa base intentar dar el paso más largo posible, es decir, determinar

$$t^* = \max\{t / \varphi(t) \leq \varphi(0) + \sigma\varphi'(0)t\}$$

Notar que ese paso  $t^*$  permite garantizar una disminución del valor de la función  $\varphi$  al menos en  $\sigma|\varphi'(0)|t^*$ . Ahora bien, como ese cálculo puede ser difícil, Armijo propone una búsqueda aproximada de la forma siguiente: dado  $h > 0$  pequeño, tal que  $\varphi(h) \leq \varphi(0) + \sigma\varphi'(0)h$  el paso elegido es

$$t_k = \max_{p=1,2,\dots} \{t = ph / \varphi(t) \leq \varphi(0) + \sigma\varphi'(0)t\}$$

## 7.5. Optimización con restricciones

En esta sección expondremos de manera general y aplicable, tres métodos de optimización con restricciones y sus posibles extensiones. Se trata de los métodos del **gradiente proyectado**,



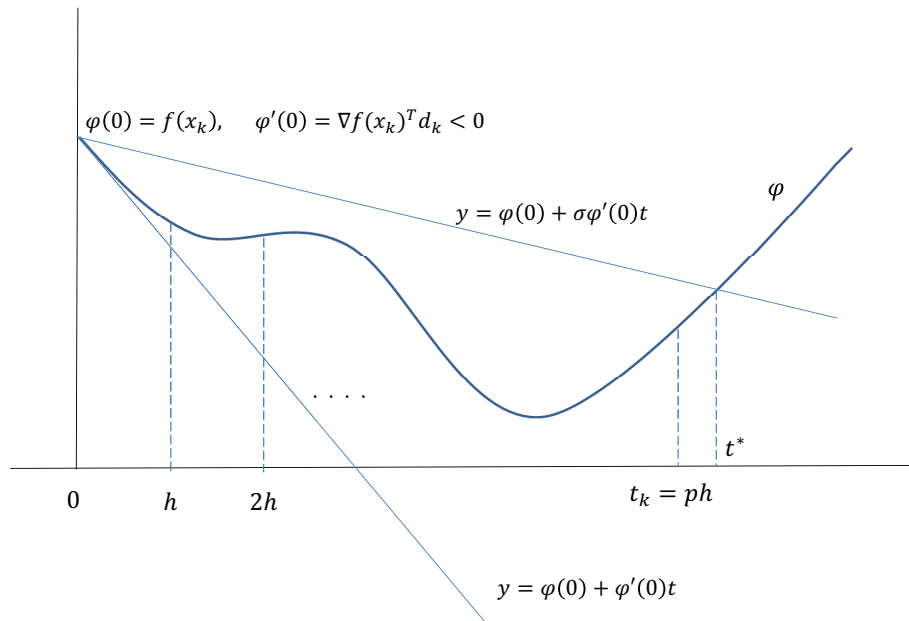


Figura 7.6: Esquema de la búsqueda de Armijo.

de **direcciones admisibles** y de **penalización**.

### 7.5.1. Método del gradiente proyectado

Este método es una generalización del método del gradiente, al caso de un problema de función objetivo no lineal y restricciones lineales. Una extensión al caso de restricciones no lineales puede también ser propuesta, pero está fuera del alcance de este texto. La idea es la siguiente: a partir de un punto factible, es decir que satisface las restricciones que definen el poliedro factible, se propone la dirección del método del gradiente (la misma usada en el método correspondiente al caso sin restricciones). Si esta dirección es admisible entonces se determina un paso sobre ella, tal como en el método irrestricto. Si no, entonces se procede a proyectar esta dirección sobre la cara "más cercana" del poliedro y se elige esa nueva dirección como dirección de búsqueda unidimensional. Este método es también conocido como método de Rosen y data de comienzos de la década de 1960.

Antes de describir formalmente este algoritmo, es necesario recordar algunos conceptos

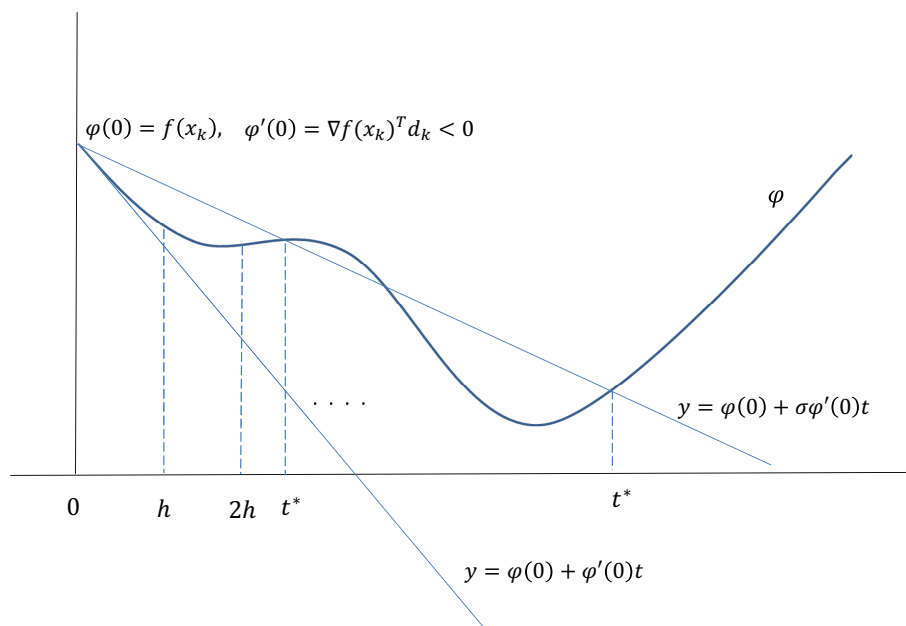


Figura 7.7: Esquema de la búsqueda de Armijo, sin unicidad de  $t_k$ .

de álgebra lineal.

**Definición 7.5.1** Una matriz  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$  se dice **matriz de proyección** si ella es simétrica e idempotente (es decir, satisface  $P = P^T$  y  $P = P^2$ ).

### Algunas propiedades de la proyección

Sea  $P$  una proyección. Entonces

- $P$  es semidefinida positiva.
- Si  $P$  es invertible, entonces  $P = I$  (esto significa que en general las proyecciones son no invertibles, a menos que se trate de la identidad).
- $I-P$  es una proyección.
- El conjunto  $L = \{Px / x \in \mathbb{R}^n\}$  es ortogonal a  $L^\perp = \{(I - P)x / x \in \mathbb{R}^n\}$  y  $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$ .

Consideremos entonces el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & Ax \leq b \\ & Ex = e \end{aligned}$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  y  $E \in \mathcal{M}_{l \times n}$ . Este es un problema de optimización no lineal, pero el dominio o conjunto factible es un poliedro  $\mathcal{P}$ .

Si  $\bar{x}$  es un punto factible de  $P$ , entonces definamos la descomposición de la matriz  $A$  de la manera siguiente (eventualmente reordenando filas):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \text{tal que } A_1 \bar{x} = b_1, \quad A_2 \bar{x} < b_2,$$

donde  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  es la correspondiente descomposición del lado derecho de la inecuación. Se observa que esta descomposición permite identificar cuáles son las restricciones activas y las no activas.

La idea es entonces proyectar la dirección del método del gradiente sobre la cara "más cercana" del poliedro, definida por las restricciones activas. Sea entonces la matriz  $M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$ .

La proyección de  $-\nabla f(\bar{x})$  sobre el núcleo de  $M$  es  $d = -P\nabla f(\bar{x})$ , donde

$$P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$$

Es un buen ejercicio demostrar que la proyección sobre el núcleo de  $M$  está dada por la matriz  $P$ , en el caso que el rango-filas de  $M$  es completo, es decir sus filas son linealmente independientes.

**Observación 7.5.1** *Notar que una dirección es admisible para el sistema de inecuaciones  $Ax \leq b$ ,  $Ex = e$ , si y sólo si satisface  $A_1 d \leq 0$  y  $Ed = 0$ . Para las restricciones inactivas en un punto dado  $\bar{x}$ , representadas por la matriz  $A_2$ , cualquier dirección a partir de  $\bar{x}$  es admisible, dado que  $A_2 \bar{x} < b_2$ .*

**Lema 7.5.1** *La dirección definida por  $d = -P\nabla f(\bar{x})$  es de descenso, en el sentido que  $\nabla f(\bar{x})^T d \leq 0$ , y es admisible, en el sentido que  $A_1 d \leq 0$  y  $Ed = 0$ .*

**Demostración.** La dirección definida cumple:

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x})^T d &= -\nabla f(\bar{x})^T P \nabla f(\bar{x}) \\ &= -\nabla f(\bar{x})^T P^T P \nabla f(\bar{x}) \\ &= -\|P \nabla f(\bar{x})\|^2 \leq 0\end{aligned}$$

Por otro lado, se es obvio que  $MP = 0$  y entonces se cumple  $Md = -MP \nabla f(\bar{x}) = 0$ , de donde  $A_1 d = 0$  y  $Ed = 0$ . ■

El siguiente teorema justifica que proyectar la dirección del método del gradiente es una buena elección en el caso de restricciones lineales, en el sentido que eso permite deducir una dirección admisible y de descenso, así como inducir un criterio de detención.

**Teorema 7.5.1** *Consideremos el problema*

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & Ax \leq b \\ & Ex = e \end{aligned}$$

y sea  $\bar{x}$  un punto factible. Sea la descomposición

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \text{tal que } A_1 \bar{x} = b_1, \quad A_2 \bar{x} < b_2.$$

Si la matriz  $M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$  tiene rango-filas completo y  $P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$ , sea

$$w = -(MM^T)^{-1}M \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Se cumple que:

- Si  $d = -P \nabla f(\bar{x}) = 0$  y  $u \geq 0$ , entonces  $\bar{x}$  es un punto de Karush-Kuhn-Tucker.
- Si  $d = -P \nabla f(\bar{x}) = 0$  y  $u \not\geq 0$ , entonces sea  $u_j$  una componente estrictamente negativa del subvector  $u$  y redefinamos la matriz  $\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ E \end{bmatrix}$ , en que  $\bar{A}_1$  resulta de eliminar la fila  $j$  de  $A_1$ . Redefiniendo  $\bar{P} = I - \bar{M}^T(\bar{M}\bar{M}^T)^{-1}\bar{M}$  se tiene que  $\bar{d} = -\bar{P} \nabla f(\bar{x})$  es una dirección admisible y de descenso.

**Demostración.** En el caso  $u \geq 0$ , si  $d = 0$  entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= -P\nabla f(\bar{x}) \\
 &= \nabla f(\bar{x}) - M^T(MM^T)^{-1}M\nabla f(\bar{x}) \\
 &= \nabla f(\bar{x}) + M^T w \\
 &= \nabla f(\bar{x}) + [A_1^T, E^T] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
 &= \nabla f(\bar{x}) + A_1^T u + E^T v,
 \end{aligned}$$

y es claro que esta es la condición de Karush-Kuhn-Tucker.

Veamos ahora el caso  $u \not\geq 0$ . Elijamos una coordenada  $u_j < 0$  y definamos  $\bar{d} = -\bar{P}\nabla f(\bar{x})$ , suponiendo que es igual a cero. Entonces, como antes, se puede escribir

$$0 = \nabla f(\bar{x}) + \bar{M}^T \bar{w},$$

donde  $\bar{w} = -(\bar{M}\bar{M}^T)^{-1}\bar{M}\nabla f(\bar{x})$ . También, por hipótesis, tenemos que

$$0 = \nabla f(\bar{x}) + M^T w,$$

luego

$$\begin{aligned}
 \bar{M}^T \bar{w} &= M^T w \\
 &= A_1^T u + E^T v \\
 &= \bar{A}_1^T \tilde{u} + E^T v + u_j a_j^T
 \end{aligned}$$

siendo  $a_j$  la fila  $j$  de  $A_1$  y  $\tilde{u} = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \neq j}$

Así, tenemos que  $\bar{M}^T \bar{w} = \bar{M}^T \tilde{w} + u_j a_j^T$ , donde  $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ v \end{pmatrix}$ . De allí, obtenemos que

$$\bar{M}^T(\bar{w} - \tilde{w}) - u_j a_j^T = 0$$

El lado izquierdo de esta expresión es una combinación lineal de las filas de  $M$ , en que al menos un ponderador es no nulo, puesto que  $u_j < 0$ .

Esto contradice que  $M$  tenga rango-filas completo, por lo tanto  $\bar{d} = -\bar{P}\nabla f(\bar{x}) \neq 0$  y, por el lema anterior,  $\bar{d}$  es dirección de descenso.

Veremos ahora que  $\bar{d}$  es dirección admisible, es decir que se cumple  $A_1\bar{d} \leq 0$  y  $E\bar{d} = 0$ . Eventualmente reordenando filas, se tiene que

$$M\bar{d} = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix} \bar{d} = \begin{pmatrix} A_1\bar{d} \\ E\bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1\bar{d} \\ a_j\bar{d} \\ E\bar{d} \end{pmatrix}$$

Pero, es claro que  $\begin{pmatrix} \bar{A}_1\bar{d} \\ E\bar{d} \end{pmatrix} = \bar{M}\bar{d} = -\bar{M}\bar{P}\nabla f(\bar{x}) = 0$ , puesto que  $\bar{M}\bar{P} = 0$ . Entonces se tiene que

$$M\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_j\bar{d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, en particular,  $\bar{A}_1\bar{d} = 0$ ,  $E\bar{d} = 0$ . Luego, para probar que  $A_1\bar{d} \leq 0$ , basta probar  $a_j\bar{d} \leq 0$ . Para eso, retomemos

$$\begin{aligned} 0 &= P\nabla f(\bar{x}) \\ &= \nabla f(\bar{x}) + M^T w \\ &= \nabla f(\bar{x}) + \bar{M}^T \tilde{w} + u_j a_j^T \\ &= a_j \bar{P} \nabla f(\bar{x}) + a_j \bar{P} \bar{M}^T \tilde{w} + u_j a_j \bar{P} a_j^T \quad (\text{multiplicamos por } a_j \bar{P}) \\ &= a_j \bar{P} \nabla f(\bar{x}) + u_j a_j \bar{P} a_j^T \quad (\text{notamos que } \bar{M}\bar{P} = 0) \\ &= -a_j \bar{d} + u_j a_j \bar{P} a_j^T \end{aligned}$$

Dado que  $u_j \leq 0$  y  $a_j \bar{P} a_j^T \geq 0$ , entonces tenemos  $a_j \bar{d} \leq 0$ , que es lo que queríamos demostrar. ■

### Esquema del método del gradiente proyectado (Rosen)

(0) Sean  $k = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax_0 \leq b$ ,  $Ex_0 = e$ .

(1) Sea la descomposición  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  tal que  $A_1 x_k = b_1$ ,  $A_2 x_k < b_2$  y definamos

$$M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}.$$

(2) Sean  $P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$ ,  $d_k = -P\nabla f(x_k)$   
(si  $M$  es vacía, se usa  $P = I$ )

Si  $d_k = 0$  y  $P = I$ , entonces parar (la solución en curso satisface *KKT*)

Si  $d_k = 0$  y  $P \neq I$ , entonces ir a (3)

Si  $d_k \neq 0$ , ir a (4)

$$(3) \text{ Definir } w = -(MM^T)^{-1}M\nabla f(x_k) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Si  $u \geq 0$ , parar, pues la solución en curso satisface *KKT*.

Si  $u \not\geq 0$ , sea  $u_j < 0$  (cualquiera) y redefinir  $M$ , eliminando la fila  $j$ . Ir a (2).

(4) Determinar el paso, resolviendo el problema de minimización unidimensional

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x_k + \lambda d_k) \\ & \lambda \in [0, \bar{\lambda}_k] \end{aligned}$$

donde  $\bar{\lambda}_k = \sup\{\lambda / x_k + \lambda d_k \in \mathcal{P}\}$ .

Sea  $\lambda_k$  la solución de este subproblema. Hacer:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad k \leftarrow k + 1 \quad \text{e ir a (1)}.$$

**Observación 7.5.2** *El valor de  $\bar{\lambda}_k$  puede ser calculado en forma explícita en el caso de restricciones lineales. En primer lugar notemos que dado que  $Ex_k = e$  y que la dirección satisface  $Ed_k = 0$ , entonces  $E(x_k + \lambda d_k) = e$ , cualquiera que sea  $\lambda$ . Por lo tanto, solamente se debe determinar  $\bar{\lambda}_k > 0$  que garantice  $A(x_k + \lambda d_k) \leq b$ , para todo  $\lambda \in [0, \bar{\lambda}_k]$ .*

*Entonces, imponemos  $\lambda Ad_k \leq b - Ax_k$ , para todo  $\lambda \in [0, \bar{\lambda}_k]$ , lo cual se escribe por coordenada de la manera siguiente:*

$$\lambda (Ad_k)_i \leq (b - Ax_k)_i \quad i = 1, \dots, m, \quad \lambda \in [0, \bar{\lambda}_k].$$

*Dado que el lado derecho es positivo, para los valores de  $i$  tales que  $(Ad_k)_i \leq 0$ , la desigualdad anterior es trivialmente satisfecha. Esto significa que*

$$\bar{\lambda}_k = \text{mín} \left\{ \frac{(b - Ax_k)_i}{(Ad_k)_i} / (Ad_k)_i > 0 \right\}.$$

*Como  $A_1 d_k = 0$ , entonces se puede escribir en forma más simple*

$$\bar{\lambda}_k = \text{mín} \left\{ \frac{(b_2 - A_2 x_k)_i}{(A_2 d_k)_i} / (A_2 d_k)_i > 0 \right\}.$$

*Notar que este es esencialmente el criterio de salida de la base en el método Simplex. De hecho, si no existe  $(A_2 d_k)_i > 0$ , entonces se considera  $\bar{\lambda}_k = +\infty$ .*

**Observación 7.5.3** Existen extensiones de este método al caso de restricciones no lineales, pero están fuera del marco de este curso. Ellas están basadas esencialmente en la aproximación local de primer orden de las restricciones activas en cada punto  $x_k$ .

**Ejemplo 7.5.1** Consideremos el problema

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{mín } (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \\
 & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & -x_1 \leq 0 \\
 & -x_2 \leq 0
 \end{aligned}$$

Supongamos que se tiene el punto factible en curso  $x_k = (2, 3)^T$ . Tenemos entonces que

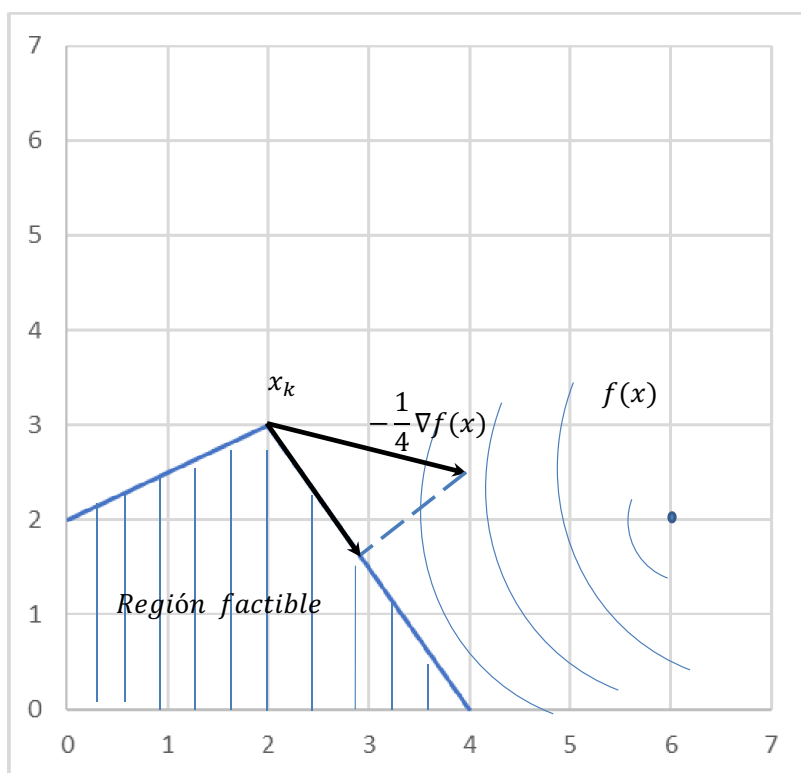


Figura 7.8: Esquema del gradiente proyectado (el término  $\frac{1}{4}$  es para escalar la longitud).



$\nabla f(x_k) = (-8, 2)^T$  y la matriz

$$M = A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

representa las dos primeras restricciones (activas en  $x_k$ ). Entonces,

$$MM^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}, \quad (MM^T)^{-1} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego, evidentemente, se tiene que  $d_k = -P\nabla f(x_k) = 0$ . Debemos analizar el vector  $w$ ,

$$w = -\frac{1}{64} \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} -176 \\ 112 \end{pmatrix}.$$

Corresponde entonces eliminar la fila 1 de la matriz  $M$  y repetir el cálculo. Entonces, usando la matriz  $\bar{M} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$  se obtiene

$$\bar{P} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

luego

$$d_k = -\bar{P}\nabla f(x_k) = \frac{22}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Usamos entonces la dirección  $d_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Evaluando  $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k) = (2\lambda - 4)^2 + (-3\lambda + 1)^2$  cuyo mínimo en el intervalo admisible  $[0, \bar{\lambda}_k] = [0, 1]$  es  $\lambda_k = \frac{11}{13}$ , lo que implica que

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 48/13 \\ 6/13 \end{pmatrix},$$

que es la nueva solución en curso. Aplicando otra iteración completa del algoritmo se encuentra que de hecho es la solución del problema  $P$ .

## 7.5.2. Método de direcciones admisibles

### Caso de restricciones lineales

Esta es una familia de métodos, basados en la idea general de iterar desde un punto factible a otro siguiendo una dirección admisible y de descenso, y aplicando una búsqueda unidimensional sobre la variedad lineal definida por la dirección. De hecho, el método del gradiente

proyectado puede ser considerado dentro de esta familia, con la particularidad que en ese caso el trazo lineal de búsqueda está contenido en una cara del poliedro.

Consideremos de nuevo el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & Ax \leq b \\ & Ex = e \end{aligned}$$

y un punto factible  $\bar{x}$ . Usando la misma notación de la sección anterior, recordemos que  $\bar{d}$  es una dirección admisible si cumple  $A_1\bar{d} \leq 0$  y  $E\bar{d} = 0$ . Además, es de descenso si  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} < 0$ .

Una forma de determinar una dirección de búsqueda a partir de  $\bar{x}$  es resolver el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } & \nabla f(\bar{x})^T d \\ & A_1 d \leq 0 \\ & Ed = 0 \end{aligned}$$

que puede ser un problema no acotado, si  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ . Por esta razón se impone una cota a la dirección, dado que la norma de la solución no es relevante en el proceso de búsqueda unidimensional. Entonces, la dirección se determina mediante

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{mín } & \nabla f(\bar{x})^T d \\ & A_1 d \leq 0 \\ & Ed = 0 \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

**Observación 7.5.4** *Notar que (D) es un problema de programación lineal cuyo poliedro factible es acotado, lo cual implica que tiene solución finita. Además, dado que  $d = 0$  es factible, la solución  $\bar{d}$  de (D) satisface  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} \leq 0$ .*

Veamos qué ocurre si el óptimo  $\bar{d}$  de este problema es tal que  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0$ . Entonces es claro que no existe  $d$  tal que

$$(S_1) \quad \begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ A_1 d &\leq 0 \\ Ed &= 0 \\ -1 \leq d_j &\leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

lo cual dice que no existe  $d$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ A_1 d &\leq 0 \\ Ed &= 0 \end{aligned}$$

puesto que, si existiese, bastaría normalizar la solución para tener una solución de  $(S_1)$ . Es decir, no existe  $d$  tal que

$$\begin{aligned} -\nabla f(\bar{x})^T d &> 0 \\ \begin{bmatrix} A_1 \\ E \\ -E \end{bmatrix} d &\leq 0 \end{aligned}$$

y, por el teorema de Farkas, existen  $u, v', v'' \geq 0$  tales que

$$[A_1^T, E^T, -E^T] \begin{pmatrix} u \\ v' \\ v'' \end{pmatrix} = -\nabla f(\bar{x}).$$

Haciendo  $v = v' - v''$  se obtiene

$$\nabla f(\bar{x}) + A_1^T u + E^T v = 0, \quad u \geq 0$$

que corresponde a la ecuación de Karush-Kuhn-Tucker del problema  $(P)$ .

Inversamente, supongamos ahora que  $\bar{x}$  es un punto de Karush-Kuhn-Tucker, es decir, existen  $u \geq 0$  y  $v$ , tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + A_1^T u + E^T v = 0.$$

Entonces, haciendo la reversa de todos los pasos anteriores, el sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ A_1 d &\leq 0 \\ E d &= 0 \end{aligned}$$

no tiene solución, lo que significa que el óptimo de  $(\mathcal{D})$  satisface  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0$ .

Hemos demostrado el teorema siguiente.

**Teorema 7.5.2** *Sea  $\bar{x}$  un punto factible de  $(P)$ . Consideremos problema  $(\mathcal{D})$ , que permite encontrar una dirección admisible de descenso para el problema  $(P)$ . Entonces,  $\bar{x}$  es punto de Karush-Kuhn-Tucker si y solamente si el óptimo  $\bar{d}$  de  $(\mathcal{D})$  satisface  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0$ .*

### Esquema del método de direcciones admisibles (Zoutendijk)

(0) Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $k = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax_0 \leq b$ ,  $Ex_0 = e$ .

(1) Sea la descomposición  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  tal que  $A_1 x_k = b_1$ ,  $A_2 x_k < b_2$ .

(2) Resolver el problema lineal

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_k) \quad & \text{mín } \nabla f(x_k)^T d \\
 & A_1 d \leq 0 \\
 & E d = 0 \\
 & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

y sea  $d_k$  solución de  $(\mathcal{D}_k)$ .

Si  $\|\nabla f(x_k)^T d_k\| < \varepsilon$ , entonces parar.

Si no, ir a (3).

(3) Determinar el paso, resolviendo el problema de minimización unidimensional

$$\begin{aligned}
 (L) \quad & \text{mín } f(x_k + \lambda d_k) \\
 & \lambda \in [0, \bar{\lambda}_k]
 \end{aligned}$$

donde  $\bar{\lambda}_k = \text{mín} \left\{ \frac{(b_2 - A_2 x_k)_i}{(A_2 d_k)_i} / (A_2 d_k)_i > 0 \right\}$ .

Sea  $\lambda_k$  la solución de este subproblema  $(L)$ . Hacer:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad k \leftarrow k + 1 \quad \text{e ir a (1)}.$$

**Observación 7.5.5** *Notar que el valor de  $\bar{\lambda}_k$  podría ser igual a  $+\infty$ , en el caso en que  $A d_k \leq 0$ . En esa situación, podría detectarse no acotamiento de  $(P)$ , si es que  $f(x_k + \lambda d_k)$  es monótona decreciente con  $\lambda \geq 0$ .*

**Ejemplo 7.5.2** *Consideremos de nuevo el problema  $(P)$  del Ejemplo 7.5.1. Para usar el algoritmo de direcciones admisibles en este caso debemos encontrar la dirección de búsqueda mediante el problema de optimización lineal, que considera solamente las dos primeras restricciones, que son activas en el punto en curso  $x_k = (2, 3)^T$ .*

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}) \quad & \text{mín } -8d_1 + 2d_2 \\
 & -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\
 & 3d_1 + 2d_2 \leq 0 \\
 & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, 2
 \end{aligned}$$

*La solución de este problema es  $(2/3, -1)$ , de manera que usamos la dirección de búsqueda  $d_k = (2, -3)^T$ , que es casualmente la misma que se encontró en el caso del algoritmo del gradiente proyectado (esto no tiene por qué ser siempre así).*

## Caso de restricciones no lineales

En esta subsección consideraremos el caso

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

y un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , factible para (P). Si suponemos que  $f$  y  $g_i$ , para  $i \in I$ , son diferenciables y que  $g_i$ , para  $i \notin I$ , son continuas, entonces se puede demostrar que una dirección  $d$  que satisface  $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$  y  $\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$  para  $i \in I$ , es una dirección admisible y de descenso.

Una posible generalización del método de direcciones admisibles de la sección anterior es determinar la dirección resolviendo el problema auxiliar (lineal) siguiente:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & z \\ & \nabla f(\bar{x})^T d \leq z \\ & \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq z \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dado que el par  $(d, z) = (0, 0)$  es factible, entonces es fácil ver que el óptimo  $(\bar{d}, \bar{z})$  de este problema satisface  $\bar{z} \leq 0$ .

Además, si  $\bar{z} < 0$ , entonces, evidentemente la dirección  $\bar{d}$  es admisible y de descenso. Por otra parte, si  $\bar{z} = 0$  entonces, no existe  $d$  tal que  $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$  y  $\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$ , para  $i \in I$ . Por el teorema de Gordan, podemos decir que existen coeficientes  $u_0 \geq 0$ ,  $u_i \geq 0$ , para  $i \in I$ , no todos nulos, tales que

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

que es la condición de Fritz-John.

Inversamente, de manera análoga, se puede demostrar que si  $\bar{x}$  es un punto de Fritz-John, entonces  $\bar{z} = 0$ . Por cierto, si el conjunto  $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I}$  es linealmente independiente (o alguna otra calificación de restricciones), se obtiene la condición de KKT.

## Esquema del método para restricciones no lineales (Topkis-Veinott)

(0) Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $k = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

(1) Resolver el problema lineal

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_k) \quad & \text{mín} \quad z \\
 & \nabla f(x_k)^T d \leq z \\
 & \nabla g_i(x_k)^T d \leq z \quad i \in I \\
 & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

y sea  $(z_k, d_k)$  solución de  $(\mathcal{D}_k)$ .

Si  $|z_k| < \varepsilon$ , entonces parar.

Si no, ir a (2).

(2) Determinar el paso, resolviendo el problema de minimización unidimensional

$$\begin{aligned}
 (L) \quad & \text{mín} \quad f(x_k + \lambda d_k) \\
 & \lambda \in [0, \bar{\lambda}_k]
 \end{aligned}$$

donde  $\bar{\lambda}_k = \sup \{ \lambda / g_i(x_k + \lambda d_k) \leq 0, i = 1, \dots, m \}$ .

Sea  $\lambda_k$  la solución de este subproblema  $(L)$ . Hacer:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad k \leftarrow k + 1 \quad \text{e ir a (1)}.$$

**Observación 7.5.6** *Una variante de este método es considerar todas las funciones  $g_i$  en la segunda restricción del problema  $\mathcal{D}_k$ , imponiendo*

$$\nabla g_i(x_k)^T d \leq z - g_i(x_k) \quad i = 1, \dots, m$$

*Es decir, intervienen también todas las restricciones inactivas, pero de manera relajada, en el sentido que el lado derecho de la restricción agregada puede ser positivo. Este cambio menor mejora la elección de  $d_k$  y por lo tanto el comportamiento de la secuencia de puntos  $x_k$  (proponga una interpretación intuitiva de esto).*

### 7.5.3. Método de penalización

En esta sección introduciremos el concepto de penalización en base a un ejemplo con restricciones de igualdad, no necesariamente afines. Entonces, por ahora consideremos el problema

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{mín} \quad f(x) \\
 & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l
 \end{aligned}$$

La idea del método de penalización es resolver una secuencia de problemas de optimización irrestricta, aproximando así de manera sucesiva, la solución del problema  $(P)$ . Sea entonces el problema

$$(P_\mu) \quad \text{mín } f(x) + \mu \sum_{j=1}^l h_j(x)^2$$

donde  $\mu > 0$  es una constante arbitraria. De un punto de vista intuitivo, si  $\mu$  es un valor relativamente grande, entonces la solución óptima de  $(P_\mu)$  tenderá a satisfacer las restricciones de  $(P)$ . Se puede entonces interpretar el factor  $\mu$  como un "pago o castigo" por insatisfacción de las restricciones.

Pero, cuando la constante  $\mu$  es muy grande, pueden aparecer problemas de estabilidad numérica en la resolución del problema  $(P_\mu)$ . Por esta razón se usa generar una sucesión creciente  $\{\mu_k\}$ , de manera de ir aproximando la solución de  $(P)$  iterativamente y usando la solución de un problema aproximado  $(P_{\mu_k})$  como punto de partida para la resolución del problema  $(P_{\mu_{k+1}})$ .

Veamos esto a través de un ejemplo:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

El problema penalizado es

$$(P_{\mu_k}) \quad \text{mín } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mu_k [(x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2]$$

donde usamos la secuencia  $\mu_k = 10^k$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces, resolviendo este problema para diferentes valores de  $k$ , se encuentra la secuencia siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_0 = 1 &\implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ \mu_1 = 10 &\implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{10}{31}, \frac{10}{31}, \frac{10}{31}\right) \\ \mu_2 = 100 &\implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{100}{301}, \frac{100}{301}, \frac{100}{301}\right) \end{aligned}$$

En el límite, la secuencia tiende al óptimo de  $(P)$ , que es  $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

El caso anterior corresponde a lo que se denomina penalización cuadrática, pero la noción de función de penalización es más general.

Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ &h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ &x \in X \end{aligned}$$

**Definición 7.5.2** Una función continua  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **función de penalización** si está dada por

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \phi(g_i(x)) + \sum_{j=1}^l \psi(h_j(x))$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son continuas en  $\mathbb{R}^n$  y satisfacen las propiedades:

$$\begin{aligned} y \leq 0 &\implies \phi(y) = 0 \\ y > 0 &\implies \phi(y) > 0 \\ z = 0 &\implies \psi(z) = 0 \\ z \neq 0 &\implies \psi(z) > 0 \end{aligned}$$

Por ejemplo, se puede elegir

$$\begin{aligned} \phi(y) &= (\text{máx}\{0, y\})^p & p \in \mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \dots\} \\ \psi(z) &= |z|^p & p \in \mathbb{N}_* \end{aligned}$$

Tal como se sugiere en el ejemplo, construimos entonces el problema auxiliar

$$(P_\mu) \quad \text{ínf}\{f(x) + \mu\alpha(x) / x \in X\}$$

y su función valor asociada

$$\theta(\mu) = \text{ínf}\{f(x) + \mu\alpha(x) / x \in X\}$$

**Lema 7.5.2** Supongamos que  $f$ ,  $g_i$ , y  $h_j$  son todas continuas en  $\mathbb{R}^n$  y que  $X$  es no vacío. Sea también  $\alpha$  una función de penalización y supongamos que para todo  $\mu > 0$  existe  $x_\mu \in X$  tal que  $\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu\alpha(x_\mu)$ . Entonces

$$(1) \quad \text{ínf}\{f(x) / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l, x \in X\} \geq \sup\{\theta(\mu) / \mu \geq 0\}$$

$$(2) \quad \alpha(x_\mu) \text{ es no creciente con } \mu \geq 0$$



(3)  $f(x_\mu)$  es no decreciente con  $\mu \geq 0$

(4)  $\theta(\mu)$  es no decreciente con  $\mu \geq 0$

**Demostración.**

(1) Sea  $x$  un punto factible, es decir,  $\alpha(x) = 0$ . Entonces, para  $\mu \geq 0$  se tiene,

$$f(x) = f(x) + \mu\alpha(x) \geq \inf\{f(y) + \mu\alpha(y) / y \in X\} = \theta(\mu)$$

de donde

$$\inf\{f(x) / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l, x \in X\} \geq \theta(\mu)$$

y por lo tanto

$$\inf\{f(x) / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l, x \in X\} \geq \sup\{\theta(\mu) / \mu \geq 0\}.$$

(2) Sean ahora  $0 < \mu_1 < \mu_2$ , entonces se tiene

$$f(x_{\mu_2}) + \mu_1\alpha(x_{\mu_2}) \geq \theta(\mu_1) = f(x_{\mu_1}) + \mu_1\alpha(x_{\mu_1}) \quad (*)$$

$$f(x_{\mu_1}) + \mu_2\alpha(x_{\mu_1}) \geq \theta(\mu_2) = f(x_{\mu_2}) + \mu_2\alpha(x_{\mu_2})$$

y sumando se deduce

$$(\mu_2 - \mu_1)(\alpha(x_{\mu_1}) - \alpha(x_{\mu_2})) \geq 0,$$

lo que prueba que

$$\alpha(x_{\mu_1}) \geq \alpha(x_{\mu_2}),$$

es decir,  $\alpha$  es no creciente.

(3) La expresión (\*) se escribe

$$f(x_{\mu_2}) + \mu_1\alpha(x_{\mu_2}) \geq f(x_{\mu_1}) + \mu_1\alpha(x_{\mu_1})$$

de donde

$$f(x_{\mu_2}) \geq f(x_{\mu_1}) + \mu_1(\alpha(x_{\mu_1}) - \alpha(x_{\mu_2})),$$

luego

$$f(x_{\mu_2}) \geq f(x_{\mu_1}),$$

es decir,  $f$  es no decreciente.

(4) Usando de nuevo (\*), tenemos que

$$f(x_{\mu_2}) + \mu_1\alpha(x_{\mu_2}) + \mu_2\alpha(x_{\mu_2}) - \mu_2\alpha(x_{\mu_2}) \geq f(x_{\mu_1}) + \mu_1\alpha(x_{\mu_1}) = \theta(\mu_1)$$

luego

$$f(x_{\mu_2}) + \mu_2\alpha(x_{\mu_2}) + (\mu_1 - \mu_2)\alpha(x_{\mu_2}) \geq \theta(\mu_1)$$

y como  $\mu_1 - \mu_2 < 0$  y  $\alpha$  es positiva por definición, se tiene

$$\theta(\mu_2) \geq \theta(\mu_1)$$

o sea  $\theta$  es no decreciente. ■

Bajo ciertas hipótesis generales de regularidad, se puede demostrar la convergencia del método de penalización, en el sentido del teorema siguiente.

**Teorema 7.5.3** *Consideremos el problema*

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ &h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ &x \in X \end{aligned}$$

*Supongamos que las funciones  $f$ ,  $g_i$  y  $h_j$  son continuas en  $\mathbb{R}^n$  y que el problema es factible. Supongamos además que para cualquier  $\mu \geq 0$  existe  $x_\mu$  que minimiza  $f(x) + \mu\alpha(x)$  en  $X$  y que  $\{x_\mu\}_{\mu \geq 0}$  está contenido en un compacto de  $X$ .*

*Entonces*

$$\inf\{f(x) / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l, x \in X\} = \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \theta(\mu)$$

*Además, sea  $\{x_{\mu_k}\} \subseteq \{x_\mu\}_{\mu \geq 0}$  una sucesión convergente a  $\bar{x}$ , donde  $\{\mu_k\}$  es creciente a  $+\infty$ .*

*Entonces  $\bar{x}$  resuelve (P) y  $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \mu\alpha(x_\mu) = 0$ .*

**Demostración.** Como  $\theta$  es no decreciente, es obvio que  $\sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \theta(\mu)$ .

Probaremos que  $\alpha(x_\mu) \rightarrow 0$  si  $\mu \rightarrow +\infty$  y para eso elegimos un  $\varepsilon > 0$  arbitrario.

Para  $\mu = 1$ , minimizamos  $f(x) + \mu\alpha(x)$ ,  $x \in X$  y llamamos  $x_1$  a la solución.

Veremos entonces que existe  $\mu > 1$  tal que  $\alpha(x_\mu) \leq \varepsilon$ , para lo cual basta elegir un punto  $y$  cualquiera, factible para  $(P)$  y

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}|f(y) - f(x_1)| + 1.$$

Es claro, por la parte (3) de lema anterior, que  $f(x_\mu) \geq f(x_1)$ . Razonando por contradicción, supongamos que  $\alpha(x_\mu) > \varepsilon$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \{f(x) / g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l\} &\geq \theta(\mu) \\ &= f(x_\mu) + \mu\alpha(x_\mu) \\ &\geq f(x_1) + \mu\varepsilon \\ &= f(x_1) + |f(y) - f(x_1)| + \varepsilon \\ &\geq f(y) + \varepsilon \\ &> f(y) \end{aligned}$$

lo que es una contradicción puesto  $f(y)$  resulta ser menor estricto que el mínimo del problema  $(P)$ . Luego  $\alpha(x_\mu) \rightarrow 0$  si  $\mu \rightarrow +\infty$ .

Volvamos ahora a la sucesión  $\{x_{\mu_k}\}$ , que converge a  $\bar{x}$ , siendo  $\{\mu_k\}$  creciente a  $+\infty$ . Notemos, por hipótesis, que dicha sucesión  $\{x_{\mu_k}\}$  siempre existe. Entonces

$$\sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) \geq \theta(\mu_k) = f(x_{\mu_k}) + \mu_k\alpha(x_{\mu_k}) \geq f(x_{\mu_k})$$

Tomando límite y por continuidad de  $f$ , tenemos

$$\sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) \geq f(\bar{x})$$

Pero como  $\alpha(x_\mu) \rightarrow 0$  si  $\mu \rightarrow +\infty$ , entonces  $\alpha(\bar{x}) = 0$  por continuidad de  $\alpha$ , lo que significa que  $\bar{x}$  es factible. Es decir,  $f(\bar{x}) \geq \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu)$ , por parte (1) del lema anterior. Así,

$$f(\bar{x}) = \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu)$$

Finalmente, considerando  $\mu\alpha(x_\mu) = \theta(\mu) - f(x_\mu)$  y tomando límite, el lado derecho tiende a cero y se tiene

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \mu\alpha(x_\mu) = 0$$

lo que termina la demostración. ■

**Corolario 7.5.1** Si existe  $\bar{\mu}$  tal que  $\alpha(x_{\bar{\mu}}) = 0$ , entonces  $x_{\bar{\mu}}$  es solución de  $(P)$ .

### Esquema del método de penalización

(0) Sean  $k = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta > 1$ .

(1) Resolver

$$(P_k) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) + \mu_k \alpha(x) \\ x \in X \end{array}$$

usando  $x_k$  como punto de partida. Sea  $x_{k+1}$  solución de  $(P_k)$ .

(2) Si  $\mu_k \alpha(x_{k+1}) < \varepsilon$ , parar.

Si  $\mu_k \alpha(x_{k+1}) \geq \varepsilon$ , hacer  $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$ ,  $k \leftarrow k + 1$  e ir a (1).

### 7.5.4. Método de barrera (o penalización interior)

Análogamente a la penalización, en esta sección trabajamos con una secuencia de problemas más simples, pero cuyas soluciones son factibles para el problema  $(P)$  y convergen a una solución de él. La idea es partir de un punto factible e imponer barreras en cada subproblema de manera de no abandonar la región factible de  $(P)$ .

Para esto, consideramos el problema

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ x \in X \end{array}$$

donde  $f, g_1, \dots, g_m$  son funciones continuas y  $X$  es no vacío. Supondremos además que el interior del conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$  es no vacío, lo que descarta usar restricciones de igualdad. Sea entonces

$$\theta(\mu) = \inf \{f(x) + \mu \beta(x) / g_i(x) < 0, i = 1, \dots, m, x \in X\}$$

La función  $\beta$  se llama **función de barrera** y se caracteriza por ser continua, no negativa en  $\{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) < 0, i = 1, \dots, m\}$  y tiende a  $+\infty$  cuando el argumento  $x$  se aproxima desde el interior a  $\mathcal{F}\{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$  (frontera del conjunto).

Se usa habitualmente una función de la forma

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^m \phi(g_i(x))$$

en que  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es continua y satisface

$$(1) y < 0 \implies \phi(y) \geq 0$$

$$(2) \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = +\infty$$

**Ejemplo 7.5.3** Sea el problema (en dimensión 1):

$$(P) \begin{array}{l} \text{mín } x \\ -x + 1 \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array}$$

y la función  $\beta(x) = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{g_i(x)}$ . Entonces, el problema auxiliar se escribe

$$(P_\mu) \begin{array}{l} \text{mín } x + \frac{\mu}{x-1} \\ -x + 1 < 0 \end{array}$$

La idea es resolver reiteradamente el problema  $(P_\mu)$  para valores de  $\mu$  decrecientes a cero. La solución del problema  $(P_\mu)$  es  $x_\mu = 1 + \sqrt{\mu}$ , que tiende a  $\bar{x} = 1$  cuando  $\mu$  tiende a  $0^+$ .

La función  $\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu\beta(x_\mu) = 1 + 2\sqrt{\mu}$  tiende a  $f(\bar{x}) = 1$ .

**Lema 7.5.3** Consideremos el problema  $(P)$  y  $g = (g_1, \dots, g_m)^T$  siendo  $f$  y  $g$  continuas en  $\mathbb{R}^n$  y  $X \neq \emptyset$ , cerrado.

(i) Supongamos que  $\{x \in X / g(x) < 0\}$  es no vacío y que  $\beta$  es función de barrera, continua en  $\{x \in \mathbb{R}^n / g(x) < 0\}$ .

(ii) Además, supongamos que para todo  $\mu > 0$ , si  $\{x_k\} \subseteq X$  satisface  $g(x_k) < 0, \forall k$  y  $f(x_k) + \mu\beta(x_k) \rightarrow \theta(\mu)$ , entonces  $\{x_k\}$  posee una subsucesión convergente. Entonces,

(a) Para todo  $\mu > 0$  existe  $x_\mu \in X$  tal que  $g(x_\mu) < 0$  y

$$\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu\beta(x_\mu) = \inf\{f(x) + \mu\beta(x) / g(x) < 0, x \in X\}$$

(b)  $\inf\{f(x) / g(x) \leq 0, x \in X\} \leq \inf\{\theta(\mu) / \mu > 0\}$

(c) Para  $\mu > 0$ ,  $f(x_\mu)$  y  $\theta(\mu)$  son funciones no decrecientes y  $\beta(x_\mu)$  es función no creciente.

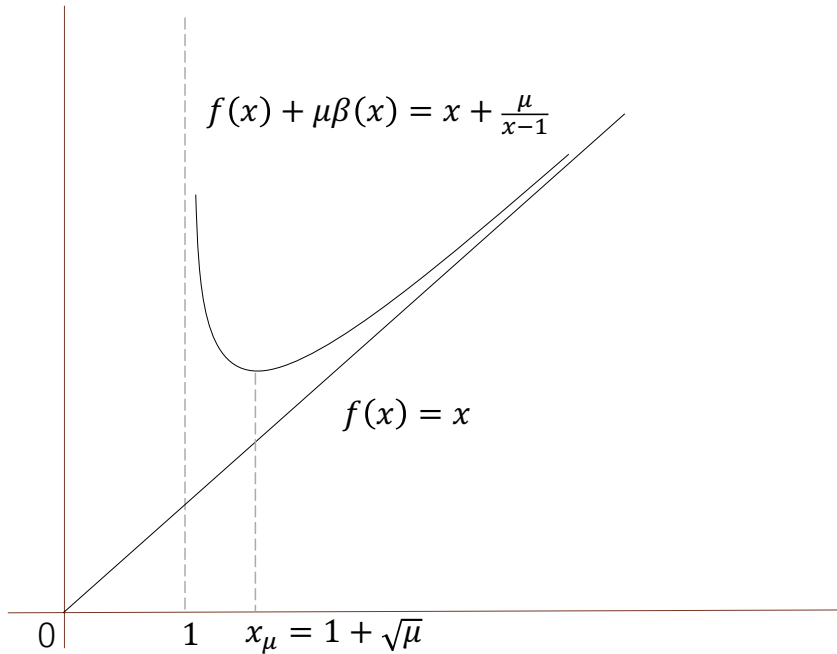


Figura 7.9: Esquema del método de barrera.

**Observación:** La condición (ii) de este lema parece ser bastante técnica, pero se satisface, por ejemplo, cuando  $\{x \in X / g(x) \leq 0\}$  es compacto.

**Demostración del lema.** Fijemos  $\mu > 0$ . Dado que

$$\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu\beta(x) / g(x) < 0, x \in X\}$$

entonces existe una sucesión  $\{x_k\} \subset X$  tal que  $g(x_k) < 0, \forall k$  y

$$f(x_k) + \mu\beta(x_k) \longrightarrow \theta(\mu), \text{ si } k \longrightarrow \infty$$

Por hipótesis, existe una subsucesión  $\{x_{k_i}\}$  convergente y sea  $x_\mu \in X$  su límite. Por continuidad de  $g$  se tiene que  $g(x_\mu) \leq 0$ , pero mostraremos que en realidad  $g(x_\mu) < 0$ .

Para eso, supongamos que  $g_i(x_\mu) = 0$ , para algún  $i = 1, \dots, m$ . Por definición de  $\beta$  tenemos que  $\beta(x_{k_i}) \longrightarrow +\infty$  lo cual implica que  $\theta(\mu) = +\infty$ . Eso es una contradicción puesto que el conjunto  $\{x \in X / g(x) < 0\}$  es no vacío, por hipótesis. Así

$$\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu\beta(x_\mu)$$

siendo  $x_\mu \in X$  tal que  $g(x_\mu) < 0$ , lo que demuestra (a).

Ahora bien, para todo  $\mu \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\theta(\mu) &= \inf\{f(x) + \mu\beta(x) / x \in X, g(x) < 0\} \\ &\geq \inf\{f(x) / x \in X, g(x) < 0\} \quad \text{pues } \mu\beta(x) \geq 0 \\ &\geq \inf\{f(x) / x \in X, g(x) \leq 0\}\end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\inf\{\theta(\mu) / \mu \geq 0\} \geq \inf\{f(x) / x \in X, g(x) \leq 0\}$$

lo que demuestra (b).

Sean ahora  $0 < \mu_1 < \mu_2$ . Para  $x \in X$ ,  $g(x) < 0$  tenemos

$$f(x) + \mu_1\beta(x) \leq f(x) + \mu_2\beta(x)$$

luego

$$\theta(\mu_1) = \inf\{f(x) + \mu_1\beta(x) / x \in X, g(x) < 0\} \leq \inf\{f(x) + \mu_2\beta(x) / x \in X, g(x) < 0\} = \theta(\mu_2)$$

o sea  $\theta$  es no decreciente.

Tomemos  $x_{\mu_1}, x_{\mu_2}$  (ambos existen). Entonces,

$$\begin{aligned}f(x_{\mu_2}) + \mu_2\beta(x_{\mu_2}) &\leq f(x_{\mu_1}) + \mu_2\beta(x_{\mu_1}) \\ f(x_{\mu_1}) + \mu_1\beta(x_{\mu_1}) &\leq f(x_{\mu_2}) + \mu_1\beta(x_{\mu_2})\end{aligned} \quad (*)$$

de donde, sumando, se tiene  $\beta(x_{\mu_2}) \leq \beta(x_{\mu_1})$ , es decir  $\beta$  es no creciente.

Reemplazando  $\beta(x_{\mu_2})$  por  $\beta(x_{\mu_1})$  en (\*), se obtiene  $f(x_{\mu_1}) \leq f(x_{\mu_2})$ , lo que muestra que  $f$  es no decreciente y termina la demostración. ■

El siguiente teorema permite justificar el método de barrera, consistente en una secuencia de problemas más simples que aproximan iterativamente la solución del problema (P).

**Teorema 7.5.4** Sean  $f, g_1, \dots, g_m$  funciones continuas en  $\mathbb{R}^n$  y  $X$ , conjunto cerrado no vacío. Supongamos además que el conjunto  $\{x \in X / g(x) < 0\}$  es no vacío.

Supongamos que el problema (P) posee una solución  $\bar{x}$ , que satisface la propiedad siguiente: para cualquier vecindad  $V$  de  $\bar{x}$ , existe un punto  $x \in V \cap X$  tal que  $g(x) < 0$ .

Entonces,

$$\min\{f(x) / g(x) \leq 0, x \in X\} = \inf\{\theta(\mu) / \mu > 0\} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \theta(\mu)$$

Más aún, si  $x_\mu$  es solución del problema

$$\inf\{f(x) + \mu\beta(x) / x \in X, g(x) < 0\}$$

entonces cualquier subsucesión convergente de  $\{x_\mu\}$  converge a una solución de (P) y se cumple  $\mu\beta(x_\mu) \rightarrow 0$  si  $\mu \rightarrow 0^+$ .

### **Demostración.**

Sea  $\bar{x}$  solución de (P), que satisface la propiedad descrita en el enunciado del teorema y sea  $\varepsilon > 0$ .

Por continuidad de  $f$  existe  $\tilde{x} \in X$  que satisface

$$g(\tilde{x}) < 0, \quad f(\bar{x}) + \varepsilon > f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \neq \bar{x}$$

Así, para  $\mu > 0$  se tiene:

$$f(\bar{x}) + \varepsilon + \mu\beta(\tilde{x}) > f(\tilde{x}) + \mu\beta(\tilde{x}) \geq \theta(\mu)$$

Si  $\mu \rightarrow 0^+$  se tiene que

$$f(\bar{x}) + \varepsilon \geq \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \theta(\mu)$$

lo cual implica

$$f(\bar{x}) \geq \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \theta(\mu)$$

puesto que  $\varepsilon$  es arbitrario.

Pero, por la parte (b) del lema anterior, se deduce que

$$f(\bar{x}) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \theta(\mu) = \inf\{\theta(\mu) / \mu > 0\}$$

lo que demuestra que

$$\min\{f(x) / g(x) \leq 0, x \in X\} = \inf\{\theta(\mu) / \mu > 0\} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \theta(\mu)$$

Por otro lado, dado que  $\beta(x_\mu) \geq 0$  y  $x_\mu$  es factible para (P), tenemos que

$$\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu\beta(x_\mu) \geq f(x_\mu) \geq f(\bar{x})$$



Si  $\mu \rightarrow 0^+$  entonces

$$\begin{aligned} f(x_\mu) &\rightarrow f(\bar{x}) \\ \text{y } f(x_\mu) + \mu\beta(x_\mu) &\rightarrow f(\bar{x}) \end{aligned}$$

luego,  $\mu\beta(x_\mu) \rightarrow 0$ .

Sea ahora una subsucesión convergente  $\{x_{\mu_k}\} \subset \{x_\mu\}$ , con  $\mu_k \rightarrow 0^+$ . Si  $\tilde{x}$  es el límite de  $\{x_{\mu_k}\}$  entonces por continuidad se tiene que  $f(\tilde{x}) = f(\bar{x})$ .

Como  $x_{\mu_k}$  es factible para  $(P)$ , para todo  $k$ , entonces  $\tilde{x}$  es factible para  $(P)$ , luego  $\tilde{x}$  es óptimo para  $(P)$ . ■

### Esquema del método de barrera

(0) Sean  $k = 0$ ,  $x_0 \in X$ , tal que  $g(x_0) < 0$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta \in ]0, 1[$ .

(1) Resolver

$$\begin{aligned} (P_k) \quad &\text{mín } f(x) + \mu_k\beta(x) \\ &g(x) < 0 \\ &x \in X \end{aligned}$$

usando  $x_k$  como punto de partida. Sea  $x_{k+1}$  solución de  $(P_k)$ .

(2) Si  $\mu_k\beta(x_{k+1}) < \varepsilon$ , parar.

Si  $\mu_k\beta(x_{k+1}) \geq \varepsilon$ , hacer  $\mu_{k+1} = \eta\mu_k$ ,  $k \leftarrow k + 1$  e ir a (1).

# Capítulo 8

## Casos especiales de optimización no lineal

### 8.1. Caso de la programación cuadrática

En este capítulo trabajaremos con la función cuadrática  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$ , donde  $Q$  es una matriz cuadrada y simétrica de  $n \times n$  y  $c$  un vector columna en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces nos interesa el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $b$  un vector en  $\mathbb{R}^m$ .

Notar que el caso simétrico es general, pues si  $Q$  no lo fuese, entonces bastaría con redefinir el problema con la matriz  $\tilde{Q} = \frac{Q + Q^T}{2}$  y se tiene que  $x^T Qx = x^T \tilde{Q}x$ .

### 8.1.1. Condiciones de KKT para el caso cuadrático

Dado que las restricciones son lineales, se aplicará el teorema de KKT al problema (P). Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + A^T u - v &= 0 \\ (u^T, v^T) \begin{pmatrix} Ax - b \\ -x \end{pmatrix} &= 0 \\ x, u, v &\geq 0 \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} Qx + c + A^T u - v &= 0 \\ u^T(Ax - b) &= 0 \\ v^T x &= 0 \\ x, u, v &\geq 0 \end{aligned}$$

de donde, definiendo  $y = b - Ax$  y reordenando tenemos

$$\begin{aligned} y + Ax &= b \\ v - A^T u - Qx &= c \\ y^T u &= 0 \\ v^T x &= 0 \\ x, y, u, v &\geq 0 \end{aligned}$$

Lo anterior se puede escribir (PC):

$$w - Mz = q \tag{8.1}$$

$$w^T z = 0 \tag{8.2}$$

$$w, z \geq 0 \tag{8.3}$$

donde  $w = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ ,  $q = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A^T & Q \end{bmatrix}$

El sistema (PC) es de tipo lineal, pero se le agrega una condición de ortogonalidad de los dos vectores. Se denomina **Problema Complementario** y las variables representan lo siguiente:

$x$ : variable primal

$y$ : holgura primal

$u$ : variable dual

$v$ : holgura dual

**Ejercicio.** Escriba explícitamente el problema dual de  $(P)$  de manera de justificar la interpretación de las variables  $u$  y  $v$ . Para eso, suponga que la matriz  $Q$  es definida positiva.

La resolución del problema complementario  $(PC)$  equivale a resolver las condiciones de KKT del problema  $(P)$ , pero a continuación analizaremos la resolución del problema complementario en forma general, siendo  $M$  una matriz de  $p \times p$  y  $q, w, z$ , vectores de  $\mathbb{R}^p$ . Es decir, el algoritmo que mostraremos a continuación resuelve el problema complementario, aunque no provenga de la minimización de una función cuadrática.

### 8.1.2. Algoritmo de Lemke para el problema complementario

Se dice que las variables  $w_j$  y  $z_j$  (con  $j = 1, \dots, p$ ) son **complementarias**, en el sentido que una de las dos debe ser cero. En efecto, la ortogonalidad  $w^T z = 0$  se denomina **ortogonalidad estructural**, pues ambas variables  $w$  y  $z$  tienen coordenadas mayores o iguales a cero.

**Definición 8.1.1** Una solución de (8.1)-(8.2)-(8.3) se dice **solución complementaria básica factible** si  $(w, z)$  es solución básica factible de (8.1), (8.3) y además una variable de cada par  $(w_j, z_j)$  es básica.

Notemos que al imponer que en cada par  $(w_j, z_j)$  haya una que es básica, se garantiza que se cumple la ecuación (8.2).

Veamos el siguiente caso simple: si  $q \geq 0$ . En ese caso, para tener una solución complementaria básica factible, basta elegir  $w = q$  y  $z = 0$ . De paso, esto significa que  $x = 0$ ,  $y = b$ ,  $u = 0$  y  $v = c$ .

Si  $q \not\geq 0$  agreguemos una columna artificial al sistema  $(PC)$  y tenemos el sistema extendido  $(PCE)$ :

$$w - Mz - z_0 e = q \tag{8.4}$$

$$w_j z_j = 0 \quad j = 1, \dots, p \tag{8.5}$$

$$w_j, z_j, z_0 \geq 0 \quad j = 1, \dots, p \tag{8.6}$$

donde las coordenadas del vector  $e$  son todas iguales a 1.

Para este sistema tenemos una solución obvia

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ w &= q + z_0 e \\ z_0 &= \max\{-q_j / j = 1, \dots, p\} \end{aligned}$$

La idea del procedimiento para resolver (*PC*) es partir de esta solución trivial de (8.4)-(8.5)-(8.6) e iterar hasta obtener una solución de (*PCE*) tal que  $z_0 = 0$ , es decir una solución de (*PC*) que sea solución complementaria básica factible.

**Definición 8.1.2** Consideremos el sistema (8.4)-(8.5)-(8.6) y una solución factible  $(w, z, z_0)$ . Esta se llamará **solución básica factible casi complementaria** si:

- $(w, z, z_0)$  es solución básica de (8.4), (8.6)
- Para algún  $s = 1, \dots, p$ ,  $w_s, z_s$  son no básicas
- $z_0$  es básica
- Exactamente una variable de cada par  $(w_j, z_j)$  es básica, para todo  $j = 1, \dots, p, j \neq s$

### Pasos del Algoritmo del Pivote Complementario

0) Si  $q \geq 0$ , parar. La solución  $(w, z) = (q, 0)$  es complementaria básica factible.

Si  $q \not\geq 0$ , establecer el cuadro de  $p$  filas y  $2p + 2$  columnas

$$\begin{array}{ccc|c} w & z & z_0 & \\ \hline I & -M & -e & q \end{array}$$

Elegir  $q_r = \min\{q_j / j = 1, \dots, p\}$  y pivotar en la columna  $z_0$ , fila  $r$ , para hacer entrar  $z_0$  a la base (operaciones elementales para dejar un vector canónico en columna  $z_0$ ).

Se dispone así de una solución básica factible casi complementaria. En efecto,  $w_r$  y  $z_r$  están fuera de la base y  $z_0$  está en la base. Se tiene una cuadro de la forma

$$\begin{array}{ccc|c} w & z & z_0 & \\ \hline \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1, 2p+1} & \bar{q}_1 \\ \vdots & \bar{a}_{ij} & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{p1} & \cdots & \bar{a}_{p, 2p+1} & \bar{q}_p \end{array}$$

- 1) Elección de variable que entra: variable complementaria de la que salió en la iteración precedente. Sea esa la columna  $s$ .
- 2) Elección de variable que sale: es la variable  $r$  tal que

$$\frac{\bar{q}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{q}_i}{\bar{a}_{is}} / \bar{a}_{is} > 0\right\}$$

donde  $a_{ij}$  representa en general el elemento de fila  $i$ , columna  $j$  de la matriz en curso.

Si debe salir la variable  $z_0$ , pivotar y parar, pues se ha encontrado una solución complementaria básica factible del problema (PC).

Si la columna  $s$ , que entra a la base, tiene todos sus coeficientes menores o iguales a cero, entonces parar: se ha identificado un rayo o dirección

$$(w, z, z_0) + \lambda d, \quad \lambda \geq 0$$

donde

$$d = \begin{cases} 1 & \text{en la posición de la variable que entraría} \\ -\bar{a}_{is} & \text{en las posiciones de las variables básicas} \\ 0 & \text{en las restantes} \end{cases}$$

que satisface el sistema (8.4)-(8.5)-(8.6). De hecho, en este caso  $z_0$  podría quedarse en la base con valor estrictamente positivo.

En otro caso, ir al paso 3).

- 3) Pivotar en la posición  $\bar{a}_{rs}$  e ir al paso 1).

**Ejemplo 8.1.1** Consideremos el caso en que

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el cuadro se escribe

$$\left[ \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Las tres primeras columnas corresponden a  $w$  y están en la base. Las tres siguientes corresponden a  $z$  y la última es  $z_0$ . El lado derecho es  $q$ .

En la primera iteración entra  $z_0$ , entonces sale  $w_2$ , que corresponde a pivotar en  $\bar{a}_{27} = -1$ . El cuadro resultante es

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Entonces entra la complementaria de la que salió en la iteración anterior, es decir, entra  $z_2$  y, de acuerdo al criterio del cociente, debe salir  $z_0$  (notar que  $z_3$  tiene idéntica columna que  $z_0$ , pero no puede salir de la base, pues ya está fuera de ella).

Pivoteando entonces en la posición  $\bar{a}_{25} = 2$  se obtiene el cuadro final (pues  $z_0$  acaba de salir de la base)

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right]$$

La solución es entonces  $w = (2, 0, 1)$ ,  $z = (0, 1, 0)$ ,  $z_0 = 0$  (las variables básicas son  $w_1$ ,  $z_2$ ,  $w_3$  (en el orden de entrada en la matriz identidad)).

**Ejemplo 8.1.2** Consideremos el problema de optimización cuadrática:

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

es decir,  $f(x) = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_2^2) - 4x_1 - 4x_2 + 8$ .

En este caso, tenemos los datos

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

y el cuadro inicial es

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

Hacemos entrar  $z_0$  a la base, pivotando sobre el coeficiente  $\bar{a}_{27}$  (es decir,  $w_2$  abandona la base), lo que genera el cuadro

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Se observa en ese cuadro que la base está compuesta por  $w_1$ ,  $z_0$  y  $w_3$ . Entonces ahora debe entrar a la base la variable  $z_2$ , que es la complementaria de la que acaba de salir ( $w_2$ ) y entonces, por el criterio el cociente, se debe pivotar en el coeficiente  $\bar{a}_{35}$ , es decir, sale la variable  $w_3$ . El cuadro queda

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & -3/2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como debe entrar la variable  $z_3$ , entonces por el criterio del cociente se decide pivotar sobre el coeficiente  $\bar{a}_{16}$ . Eso entrega el cuadro

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1/4 & 1/8 & -3/8 & 1/4 & 0 & 1 & 0 & 5/4 \\ -1/2 & -1/4 & -1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 1/4 & -3/8 & 7/8 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 5/4 \end{array} \right]$$

Entonces, como haba salido  $w_1$  en la iteración anterior, ahora debe entrar a la base la variable  $z_1$  y, por el criterio del cociente, se debe pivotar sobre  $\bar{a}_{24}$ , lo que genera el cuadro final

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1/2 & 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1/2 & -1/4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right]$$

con  $z_0$  fuera de la base, es decir, estamos en presencia de la solución complementaria básica factible

$$\begin{aligned} w &= (y, v) = (0, 0, 0) \\ z &= (u, x) = (3, 1/2, 1/2) \end{aligned}$$

En términos de las variables originales tenemos la solución

$$\begin{aligned} x &= (1/2, 1/2) \\ y &= 0 \\ u &= 3 \\ v &= (0, 0) \end{aligned}$$



**Ejemplo 8.1.3** Consideremos el caso

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Entonces, debemos aplicar el algoritmo al cuadro siguiente

$$\left[ \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

Iterando a partir del pivote  $\bar{a}_{49}$  (dos veces), se llega a

$$\left[ \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & -3/4 & -1/4 & -1/2 & 1/4 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/2 & -3/4 & -\mathbf{1} & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Como la variable que debería entrar a la base es  $z_3$  y tiene la columna menor o igual a cero, se ha detectado una dirección extrema (calculada de acuerdo a la formula)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0$$

Todos los puntos a lo largo de esta variedad lineal son soluciones del sistema extendido (8.4)-(8.5)-(8.6), pero  $z_0 \neq 0, \forall \lambda \geq 0$ , es decir, el sistema complementario no tiene solución.

Verifique que este caso proviene de un problema de optimización cuadrática y escriba el problema subyacente. Interprete gráficamente sobre el plano de ese problema cuadrático.

## 8.2. Problema lineal fraccional

Discutiremos aquí sobre una familia particular de problemas no lineales. Un problema **lineal fraccional** se escribe de la manera siguiente

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & \frac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta} \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $p$  y  $q$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares reales,  $A$  es una matriz de  $m \times n$  y  $b$  es un vector de  $\mathbb{R}^m$ .

Se puede demostrar que si este problema tiene solución, entonces existe un punto extremo del poliedro factible, que resuelve  $(P)$  y que cualquier mínimo local es global. Sin embargo, también es posible probar una propiedad muy útil: el problema fraccional puede ser escrito como un problema de programación lineal.

### 8.2.1. Equivalencia con un problema lineal

En efecto, supongamos que el dominio  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$  es compacto y  $q^T x + \beta > 0$ , para todo  $x \in \mathcal{P}$ . Denotando

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{q^T x + \beta} \\ y &= zx \end{aligned}$$

se tiene que  $(P)$  es equivalente al problema lineal

$$(PL) \quad \begin{aligned} \min \quad & p^T y + \alpha z \\ & Ay - bz \leq 0 \\ & q^T y + \beta z = 1 \\ & y, z \geq 0 \end{aligned}$$

en el sentido que mostraremos ahora.

Primero consideremos un punto factible  $(y, z)$  de  $(PL)$ . Si  $z = 0$ , entonces el conjunto factible se reduce a  $Ay \leq 0$ ,  $q^T y = 1$ ,  $y \geq 0$ , lo que en particular implica que  $y \neq 0$ . Entonces  $y$  representa una dirección del poliedro  $\mathcal{P}$ , lo cual contradice que sea compacto. Eso prueba

que  $z > 0$  para cualquier  $(y, z)$  factible.

Sea ahora  $(\bar{y}, \bar{z})$  es solución de  $(PL)$ . Probaremos que  $\bar{x} = \bar{y}/\bar{z}$  es solución de  $(P)$ . En efecto, notemos que  $\bar{x} \geq 0$  y  $A\bar{x} \leq b$ , es decir,  $\bar{x}$  es factible para  $(P)$ . Además, por optimalidad de  $(\bar{y}, \bar{z})$  se tiene

$$p^T \bar{y} + \alpha \bar{z} \leq p^T y + \alpha z$$

para todo  $(y, z)$  factible en  $(P)$ . Entonces

$$\bar{z}(p^T \bar{x} + \alpha) \leq p^T y + \alpha z$$

y de la segunda restricción de  $(PL)$

$$\frac{p^T \bar{x} + \alpha}{q^T \bar{x} + \beta} \leq p^T y + \alpha z$$

o sea,

$$\frac{p^T \bar{x} + \alpha}{q^T \bar{x} + \beta} \leq \frac{p^T y + \alpha z}{q^T y + \beta z}$$

o bien,

$$\frac{p^T \bar{x} + \alpha}{q^T \bar{x} + \beta} \leq \frac{p^T \frac{y}{z} + \alpha}{q^T \frac{y}{z} + \beta}$$

y, como es evidente que  $x = \frac{y}{z} \in \mathcal{P}$  y es arbitrario en ese conjunto, se tiene

$$\frac{p^T \bar{x} + \alpha}{q^T \bar{x} + \beta} \leq \frac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta} \quad \forall x \in \mathcal{P}$$

lo que prueba que  $\bar{x}$  es solución de  $(P)$ .

La inversa se prueba de manera análoga.

**Ejercicio 8.2.1** Probar que si se cambia la hipótesis  $q^T x + \beta > 0$  por  $q^T x + \beta < 0$ , el resultado es análogo, en el sentido que  $(P)$  es equivalente al problema lineal

$$\begin{aligned} (PL) \quad & \text{mín } -p^T y - \alpha z \\ & Ay - bz \leq 0 \\ & -q^T y - \beta z = 1 \\ & y, z \geq 0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 8.2.2** Escribir las condiciones de KKT para el problema fraccional.

## 8.3. Problemas de regresión

Describiremos aquí modelos que provienen del campo de la Estadística y el Análisis de Datos. Se trata de, ante una evidencia experimental, intentar ajustar una función (expresada analíticamente) de manera de reproducir el fenómeno en cuestión de la manera más fiel posible en relación a esos datos.

A modo de introducción, supongamos que tenemos una muestra de observaciones de una variable  $x \in \mathbb{R}^k$ , digamos  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Paralelamente, se ha observado una variable  $y$ , considerada dependiente de  $x$ , para cual se conoce la serie de valores asociados  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se propone entonces la relación funcional

$$y = f(x)$$

la cual normalmente no se satisface para la muestra observada (es decir, no se cumple  $f(x^i) = y_i$  para todo  $i$ ). Entonces, se propone hacer depender la función  $f$  de un conjunto de parámetros, representados por un vector  $\beta \in \mathbb{R}^p$ . Por ejemplo, se puede proponer un modelo de tipo lineal

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

Entonces se trata de determinar los valores de las coordenadas del vector  $\beta$  que "mejor" se ajustan a la expresión teórica

$$y = f(x; \beta)$$

Veamos a continuación tres formulaciones frecuentes.

### 8.3.1. Mínimos cuadrados (norma $l_2$ )

Se usa como criterio general minimizar la dispersión entre lo observado ( $y_i$ ) y lo estimado por el modelo ( $f(x^i; \bar{\beta})$ ), siendo  $\bar{\beta}$  el valor de los parámetros que minimiza la norma Euclídeana del vector de error. Es decir,

$$(P_2) \quad \min_{\beta} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x^i; \beta))^2$$

lo que en el caso del modelo de regresión lineal significa

$$\min_{\beta_0, \dots, \beta_k} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1^i - \dots - \beta_k x_k^i)^2$$

Notemos que en estricto rigor deberíamos minimizar la raíz de esta suma, pero dado que la raíz es una función creciente, es equivalente minimizar la suma de cuadrados, que es analíticamente más simple.

El problema  $(P_2)$  es de minimización irrestricta, el cual es bastante general, dependiendo de  $f$ . Pero, perfectamente puede ocurrir que los parámetros, que son las variables del problema de optimización, estén sometidos a restricciones, ya sea lineales o no.

### 8.3.2. Mínima dispersión según norma $l_1$

En este caso, el problema de optimización se escribe

$$(P_1) \quad \min_{\beta} \sum_{i=1}^n |y_i - f(x^i; \beta)|$$

pero dado que esta función objetivo no es diferenciable con respecto a  $\beta$ , se puede expresar mediante el modelo modificado equivalente (de  $n + p$  incógnitas):

$$(P_1) \quad \min \sum_{i=1}^n z_i$$

$$-z_i \leq y_i - f(x^i; \beta) \leq z_i \quad i = 1, \dots, n$$

el cual tiene función objetivo lineal y restricciones eventualmente no lineales, dependiendo de cuál sea el tipo de función  $f$ . A modo de ejemplo, para una variable  $x \in \mathbb{R}$ , si se usa una función de ajuste de tipo logístico,

$$y = f(x; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 e^{-x/\beta_3}}$$

tenemos el problema (de  $n + 3$  incógnitas):

$$\min \sum_{i=1}^n z_i$$

$$-z_i \leq y_i - \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 e^{-x^i/\beta_3}} \leq z_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$$

### 8.3.3. Mínima dispersión según norma $l_\infty$

En este caso, el problema de optimización se escribe

$$(P_\infty) \quad \min_{\beta} \max_{i=1, \dots, n} |y_i - f(x^i; \beta)|$$

pero en este caso la función objetivo es no diferenciable, por lo que es mejor escribir el modelo en una forma más adecuada para su resolución (tiene  $p + 1$  incógnitas)

$$(P_\infty) \quad \begin{aligned} &\min z \\ &-z \leq y_i - f(x^i; \beta) \leq z \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Por ejemplo, para el caso del ajuste de una función logística con una variable real tenemos el problema

$$\begin{aligned} &\min z \\ &-z \leq y_i - \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 e^{-x^i/\beta_3}} \leq z \quad i = 1, \dots, n \\ &\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0 \end{aligned}$$

que es un problema de función objetivo lineal y restricciones no lineales.

# Capítulo 9

## Problemas propuestos

### 9.1. Formulación y modelamiento de problemas

1. Usted es dueño de una empresa que vende camiones a empresas mineras. Un estudio de factibilidad técnica le ha indicado que existen  $n$  lugares posibles donde podría construir una planta de ensamblaje de camiones. Sea  $I$  el conjunto de lugares donde su empresa puede construir las plantas (la cardinalidad es  $|I| = n$ ). Suponga que el precio de construir la planta en el lugar  $i \in I$  es  $c_i$ . Además, usted tiene un contrato ya firmado con  $m$  empresas en el cual usted se compromete a venderles  $d_j$  camiones a cada empresa  $j \in J$ , con  $J$  el conjunto de los clientes (de cardinalidad  $|J| = m$ ). Para cada planta  $i$  y cada cliente  $j$  el precio de ensamblar cada camión y enviarlos de  $i$  a  $j$  es  $p_{ij}$ . Finalmente, considere que por problemas de plazos, cada planta  $i$  no puede ensamblar más de  $k_i$  camiones. Formule un problema de programación lineal entero que minimice los costos totales.
2. Un productor de electricidad debe planificar su producción horaria de energía para maximizar sus beneficios por venta de la misma en un horizonte de 2 horas. Formule y resuelva el problema que consiste en maximizar los beneficios del productor si:
  - Se producen 5 unidades de energía antes del periodo de planificación.
  - Los precios horarios de la energía de la primera y segunda hora son 6 y 2 unidades monetarias respectivamente por cada una unidad de energía.
  - La energía mínima que se puede producir en cada hora es 0 y la máxima 10 unidades.
  - Las producciones de energía en dos horas consecutivas no pueden diferir más de 4 unidades.

- El coste de producción es 3 unidades monetarias por unidad de energía.
3. Un inversionista debe decidir entre 6 proyectos de infraestructura a realizar, ( $P1$ ) a ( $P6$ ). Las rentabilidades esperadas ( $R_i$ ) e inversiones necesarias ( $I_i$ ) son (en millones de dólares):

Proyecto	$R_i$	$I_i$
P1: Extensión Costanera	1,5	1,1
P2: Plazas de Peaje	3,0	2,5
P3: Pavimentación en Ruta 5	5,3	4,5
P4: Extensión de la Ruta 5	3,3	3,1
P5: Pasos Peatonales en Costanera	2,5	1,8
P6: Casetas de Emergencia	0,5	0,3

Las condiciones requeridas son las siguientes:

**Inclusión:** La Extensión de la Costanera (P1) y la construcción de las Plazas de Peaje (P2) son incluyentes (si realiza uno de ellos, debe también realizar el otro).

**Requisito:** La Extensión de la Ruta 5 (P4) es requisito para la Pavimentación en Ruta 5 (P3), pero no al revés, es decir, puede realizar P4 sin realizar P3.

**Exclusión:** Por razones de probidad, el inversionista solamente podría realizar uno (a lo más) de los proyectos P5 y P6.

**Recursos:** El inversionista dispone de 10 millones de dólares para invertir.

**Número de proyectos:** El inversionista no puede realizar más de 4 proyectos.

Usando variables binarias ( $x_i = 1$  si el proyecto  $i$  se realiza, y  $x_i = 0$  si no), escriba el modelo matemático que describe este problema, es decir, la función-objetivo que representa el interés del inversionista y el conjunto de restricciones.

4. Como variante del problema anterior, suponga que el Ministerio de Obras Públicas debe asignar los 6 proyectos a dos empresas constructoras (las cuales se repartirán las 6 obras). Los costos para el Ministerio, de acuerdo a las cotizaciones entregadas por las empresas, son (en millones de dólares):

Proyecto	Empresa A	Empresa B
P1: Extensión Costanera	1,5	1,1
P2: Plazas de Peaje	3,0	2,5
P3: Pavimentación en Ruta 5	4,5	5,3
P4: Extensión de la Ruta 5	3,3	3,1
P5: Pasos Peatonales en Costanera	2,5	2,8
P6: Casetas de Emergencia	0,5	0,3



Las condiciones requeridas son las siguientes:

**Inclusión:** La Extensión de la Costanera (P1) y la construcción de las Plazas de Peaje (P2) son incluyentes (si una empresa realiza uno de ellos, debe también realizar el otro).

**Requisito:** Para la Empresa **A**, la Extensión de la Ruta 5 (P4) es requisito para la Pavimentación en Ruta 5 (P3), pero no al revés, es decir, la puede realizar P4 sin realizar P3.

**Exclusión:** Por razones de probidad, cualquiera de las dos empresas solamente podría realizar uno (a lo más) de los proyectos P5 y P6.

**Recursos:** La Empresa **B** puede asignarse proyectos por a lo más 10 millones de dólares en total.

Escriba un modelo matemático para este problema, es decir, la función objetivo que representa el interés económico del Ministerio y el conjunto de restricciones. Explique claramente la definición de sus variables y restricciones.

5. Considere una fábrica con tres tipos de máquinas: A, B y C, que pueden producir cuatro productos: 1, 2, 3 y 4. Cada producto debe pasar por alguna operación en cada uno de los tres tipos de máquina. Suponga que la producción es continua (es decir, se puede producir una cantidad no necesariamente entera de productos) y que cada producto debe pasar primero por una máquina A, luego por una B y finalmente por una C. Suponga además que el tiempo requerido para ajustar las máquinas al cambiar de producto es despreciable.

La tabla siguiente muestra las horas requeridas en cada tipo de máquina por unidad de cada producto, el tiempo total disponible por semana por máquina y la ganancia por la venta de una unidad de cada producto.

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	Tiempo Total disponible por semana
A	1,5	1	2,4	1	2000
B	1	5	1	3,5	8000
C	1,5	3	3,5	1	5000
Ganancia por unidad	5,24	7,30	8,34	4,18	

Se desea determinar la producción semanal de cada producto que maximiza las ganan-

cias. Plantee el problema como un problema de programación lineal.

6. La empresa OPTI-TV posee dos plantas de fabricación para TVs de alta definición (TVAD) en Seoul y en Busan, posee también dos fuentes de componentes en Ansan y Gumi y tres mercados principales en el mundo: Nueva York, Tokio y Londres. Un set completo de componentes se necesita para producir una unidad de producto TVAD. Los costos de transporte desde las fuentes a las fábricas y desde las fábricas a los mercados, están dados por las siguientes tablas:

	(\\$)	Seoul	Busan
Ansan		10	15
Gumi		20	15

	(\\$)	NY	Tokio	Londres
Seoul		40	10	20
Busan		30	20	30

Supongamos que hay 10.000 sets completos de componentes disponibles en Ansan y 15.000 en Gumi. Se asumirá que las fábricas poseen capacidad ilimitada de fabricación.

- a) Los centros de Nueva York, Tokio y Londres tienen demandas de 8.000, 14.000 y 3.000 TVAD, respectivamente. Formule el problema de encontrar la manera óptima de manejar el proceso de transporte (planta-fábrica-mercado) de manera de minimizar el costo de transporte.
- b) Asuma ahora que cada mercado requiere al menos 2.000 TVADs OPTI-TV y que cada unidad se vende a un precio de \$120, \$90, \$110 en Nueva York, Tokio y Londres, respectivamente (note que ya no son las demandas de la parte a)). Formule el problema de maximizar el beneficio neto.
7. La empresa minera ABFR Asoc. tiene 2 plantas de producción de cobre cuyos stocks, al día de hoy, son  $a_1 = 90.000$ ,  $a_2 = 70.000$  toneladas de mineral. Por contratos ya firmados, la empresa debe satisfacer las demandas de 3 clientes:  $b_1 = 55.000$ ,  $b_2 = 75.000$ ,  $b_3 = 50.000$ . Suponga que los costos  $c_{ij}$  (unitarios, por tonelada) entre plantas y clientes están dados por:

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Considere finalmente que, por cada tonelada no provista (demanda insatisfecha), la empresa debe pagar una penalización  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 1$  al cliente correspondiente. Formule un problema de optimización que represente esta situación.

**Indicación:** defina las variables  $x_{ij}$ , toneladas que la planta  $i$  entrega al cliente  $j$ .

8. Escriba un modelo para el problema descrito a continuación.

La National Free Transportation Agency (NAFTA), debe decidir un programa de formación y contratación de nuevas azafatas para los próximos seis meses.

Las exigencias a respetar son expresadas en horas de vuelo de azafatas: 8.000 en enero, 9.000 en febrero, 8.000 en marzo, 10.000 en abril, 9.000 en mayo y 12.000 en junio.

La formación de una nueva azafata dura un mes. Esta formación comprende 100 horas de vuelo en líneas de la compañía. Estas 100 horas se pueden deducir de exigencias que las azafatas deben cumplir, es decir, sirven para satisfacer las exigencias de horas de vuelo de azafatas de la compañía.

Cada azafata experimentada puede entregar hasta 150 horas de vuelo por mes. La compañía dispone de 60 azafatas experimentadas al 1 de enero.

Cada azafata experimentada recibe un sueldo de US\$800 por mes, independientemente del número de horas que preste servicio. Cada mes, el 10 % de las azafatas experimentadas deja su trabajo por diversas razones.

Al cabo de un mes de formación, que cuesta US\$400 a la compañía, una azafata aprendiz se convierte en azafata experimentada.

9. Un granjero posee 100 hectáreas (ha.) que pueden ser utilizadas para el cultivo de trigo y maíz. El rendimiento por ha. es de 60 quintales anuales de trigo y de 95 quintales de maíz.

Cualquier fracción de las 100 ha. puede ser destinada al cultivo de trigo o maíz. El trabajo necesario es de 4 hrs. por ha. anuales, más 0.15 hr. por quintal de trigo y 0.70 hr. por quintal de maíz. El costo de las semillas y abono es de \$20 por quintal de trigo y \$12 por quintal de maíz.

El granjero puede vender su trigo a \$175 el quintal y su maíz a \$95 el quintal. A la compra, le costarían respectivamente \$250 y \$150. Puede también criar cerdos y pollos. Los vende cuando han alcanzado la edad de 12 meses. Un cerdo se vende a \$4.000. Un ave se vende en términos de *cerdo-equivalente* (el número de pollos necesarios para obtener \$4.000 al momento de la venta).

Un cerdo requiere 25 quintales de trigo o 20 quintales de maíz, así como 25 hrs. de trabajo y 25  $m^2$  de terreno. Un *cerdo-equivalente* de pollos requiere 25 quintales de maíz o 10 quintales de trigo, así como 40 hrs. de trabajo y 15  $m^2$  de terreno.

El granjero dispone de 10.000  $m^2$  de terreno para la crianza. Dispone también de 2.000 hrs. de trabajo anuales y puede poner a su familia a trabajar, disponiendo así de 2.000 hrs. suplementarias. Puede también contratar horas suplementarias de obreros agrícolas al costo de \$150 la hora.

Cada hora de obrero agrícola demanda 0,15 hr. de trabajo de supervisión de parte del granjero.

Escriba un modelo que permita determinar las superficies a destinar al cultivo de trigo y/o maíz y las cantidades de cerdos y/o pollos a producir, de manera de maximizar el beneficio. Explícite los supuestos usados en la modelación.

## 9.2. Matemáticas para la optimización: convexidad

- Sean  $S_1$  y  $S_2$  convexos,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se define la suma y ponderación de conjuntos como sigue:

- $S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$
- $\alpha S_1 = \{\alpha x \mid x \in S_1\}$

Pruebe que  $S_1 + S_2$  y  $\alpha S_1$  son convexos.

- Sea  $S$  un convexo. Demuestre que  $x \in S$  es punto extremo si y sólo si  $S \setminus \{x\}$  es convexo.
- Probar que si  $S$  es un conjunto finito,  $co(S)$  es un poliedro.
- Use la definición de convexidad para mostrar que el conjunto  $S$  es convexo, donde

$$S = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es definida positiva}\}.$$

- (a) Sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Demuestre que

$$(\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \iff C \text{ es convexo}$$

- (b) Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un convexo tal que  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Sea  $x_1 \in \text{adh}(S)$  y  $x_2 \in \text{int}(S)$ . Demuestre que  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(S)$ ,  $\forall \lambda \in ]0, 1[$ .

- Sean  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $x \in C$ . Demuestre que  $x$  es un punto extremo de  $C$  si y sólo si  $C \setminus \{x\}$  es convexo.
- Definamos la envoltura convexa de un conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$  por

$$co\{x_1, \dots, x_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

- Demuestre explícitamente que  $co\{x_1, \dots, x_m\}$  es un conjunto convexo.

b) Demuestre que todo punto extremo de  $co\{x_1, \dots, x_m\}$  es necesariamente uno de los puntos  $x_i$ .

c) Sean  $A = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_{m_2}\}$ . Demuestre que

$$co(A \times B) = co(A) \times co(B)$$

d) Calcule los puntos extremos del hipercubo en  $\mathbb{R}^n$

$$[0, 1]^n := \{z \in \mathbb{R}^n / z_i \in [0, 1] \forall i = 1, \dots, n\}$$

8. (a) Demuestre que un poliedro es acotado si y solo si no tiene direcciones extremas.

(b) Sea  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  un poliedro convexo compacto (cerrado y acotado) en  $\mathbb{R}^n$ , con  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$  de rango  $m < n$ . Demuestre la siguiente equivalencia:

Cada elemento de  $\mathcal{P}$  tiene al menos  $m$  componentes mayores que cero

$\iff$

Cada punto extremo de  $\mathcal{P}$  tiene exactamente  $m$  componentes mayores que cero.

9. Es posible representar el conjunto  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 \geq 0\}$  empleando exclusivamente puntos extremos y direcciones extremas?

10. Sea  $\varphi(x) = Ax$  una función lineal, donde  $A$  es una matriz de dimensión  $m \times n$ . Demuestre que si  $S$  es polítopo en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\varphi(S)$  es un polítopo en  $\mathbb{R}^m$ .

**Recuerdo:** Un polítopo es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos.

11. Encuentre los puntos extremos y las direcciones extremas de los siguientes poliedros:

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

12. Considere el siguiente poliedro  $\mathcal{P}$ , definido por:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Usando los teoremas de caracterización, encuentre los puntos extremos y las direcciones extremas de  $\mathcal{P}$ .
- b) En base a lo anterior, represente el punto  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  como combinación convexa de puntos extremos más una combinación lineal no negativa de direcciones extremas.

13. Considere el poliedro

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 - 1 \geq 0, \quad x_1 - 2x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Determine todos los puntos y direcciones extremas de  $\mathcal{P}$ , usando los teoremas de caracterización. Repita su cálculo para el poliedro

$$\mathcal{P}' = \{x \in \mathbb{R}^2 / -x_1 + x_2 \leq 2, \quad x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_2 \leq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

14. Considere el poliedro  $\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^m / A^T y \leq c\}$ , con  $c \in \mathbb{R}^n$ , y el siguiente problema lineal

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Pruebe que  $\mathcal{D}$  es no vacío si y sólo si el mínimo de  $(P)$  es cero.

15. Sean  $A$  matriz  $p \times n$  y  $B$  matriz  $q \times n$ . Demuestre que uno y sólo uno de los siguientes sistemas tienen solución

- a)  $Ax < 0 \quad Bx = 0$
- b)  $A^T u + B^T v = 0 \quad u \neq 0, u \geq 0$

16. Considere la pareja de problemas:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array}$$

Pruebe, usando el teorema de Farkas, que si  $(D)$  es no acotado entonces  $(P)$  es infactible.

17. Demuestre, usando el teorema de Farkas, que si el sistema:

$$\begin{array}{l} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{array}$$

no tiene solución, entonces el problema:

$$\begin{aligned} & \text{máx } c^T x \\ & Ax \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

es no acotado.

18. Sea  $S$  un conjunto convexo no vacío en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Demuestre que los siguientes conjuntos son convexos:

- a)  $S_\alpha = \{x \in S / f(x) \leq \alpha\}$
- b)  $C = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} / f(x) \leq \alpha\}$

19. Pruebe o contradiga la concavidad de la función  $f(x_1, x_2) = 10 - 3(x_2 - x_1^2)^2$  definida en los siguientes conjuntos:

- a)  $S = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$
- b)  $S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 \geq x_2\}$

20. Sean

$$\begin{aligned} z(b) &= \text{máx}\{c^T x / Ax \leq b, x \geq 0\} \\ v(c) &= \text{máx}\{c^T x / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

Demuestre que  $z$  es cóncava y  $v$  es convexa, suponiendo que  $b$  y  $c$  están en dominios convexos en que estos dos problemas son factibles y acotados.

21. Sean  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , funciones convexas y considere la función

$$f(x) = \text{máx}\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$$

Demuestre que el problema

$$(P) \quad \text{mín } f(x), \quad x \geq 0,$$

es equivalente al problema de optimización en  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} (P') \quad & \text{mín } t \\ & f_i(x) \leq t, \quad i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

en el sentido que una solución de  $(P')$  define de manera trivial una solución de  $(P)$  y viceversa. Diga por qué el problema  $(P')$  es convexo.

22. Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y se define  $f(x) = e^{g(x)}$ . Demuestre que  $f$  es convexa.
23. Sea  $S$  un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que si  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y creciente, entonces  $f \circ g$  es convexa.
24. Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y suponga que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

Muestre que  $f$  es convexa, donde

$$f(x) = \frac{-1}{g(x)}, \quad x \in S$$

25. Utilizando argumentos de convexidad de funciones demuestre la siguiente propiedad (*Media geométrica vs Media aritmética*): sean  $a_1, \dots, a_n$  reales estrictamente positivos, entonces

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

26. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  definida por:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ |x| - 1 & \text{si } x \in [-2, -1[ \cup ]1, 2] \\ +\infty & \text{si } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[ \end{cases}$$

Demuestre que:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ [-1, 0] & \text{si } x = -1 \\ [0, 1] & \text{si } x = 1 \\ \{-1\} & \text{si } x \in ]-2, -1[ \\ \{1\} & \text{si } x \in ]1, 2[ \\ ]-\infty, -1] & \text{si } x = -2 \\ [1, +\infty[ & \text{si } x = 2 \\ \emptyset & \text{si } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[ \end{cases}$$



27. Sea  $A \in \mathcal{M}_{mn}$  y  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ , dados. Considere el problema

$$(P) \quad \text{mín } \psi(x), \quad x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\},$$

donde  $\psi(x) = \text{máx}\{c_1^T x + d_1, \dots, c_k^T x + d_k\}$ .

- Probar que  $(P)$  es un problema convexo.
- Pruebe que  $(P)$  es equivalente a un problema de programación lineal.
- Para el caso

$$(P) \quad \text{mín } \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , dado. Demuestre que si  $I = \{i = 1, \dots, m / \psi(\bar{x}) = c_i^T \bar{x} + d_i\}$ , y elegimos  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i \in I$ , tales que  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ , entonces

$$\xi = \sum_{i \in I} \lambda_i c_i$$

es un subgradiente de  $\psi$  en  $\bar{x}$ .

**Recuerdo:** Sea un conjunto convexo  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , convexa. Un vector  $\xi \in \mathbb{R}^n$  se llama **subgradiente** de  $f$  en  $\bar{x}$  si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

El conjunto de todos los subgradientes de  $f$  en  $\bar{x}$  se denota por  $\partial f(\bar{x})$ .

28. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  dada por:

$$f(x) := \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ +\infty & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[ \end{cases}$$

Demuestre que:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ \emptyset & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[ \end{cases}$$

### 9.3. Programación lineal

- Siendo usted el nuevo ingeniero de la empresa “Chemical Hnos” se le solicita maximizar la producción del producto estrella de la compañía, el ácido ASDF. Este ácido se produce mediante una reacción química que involucra sólo dos reactivos, que por simplicidad llamaremos 1 y 2, necesitando una libra del reactivo 1 y tres libras del reactivo 2 para producir un litro de ácido ASDF. Para la reacción se cuenta con un recipiente cuya capacidad no permite introducir más de mil libras de reactivos y la experiencia de los técnicos a su cargo advierte que debe utilizar al menos doscientas libras del reactivo 1 para asegurarse que la reacción llegue a buen término. Finalmente, el gerente de finanzas de la compañía le ha informado que el presupuesto asignado para realizar la reacción asciende a 6 mil US dólares y los precios de los reactivos son 3 y 9 US dólares por libra, respectivamente.

Modele lo anterior usando programación lineal. Resuelva el problema usando resolución gráfica. ¿Cuántos litros de ácido producirá la compañía? Considerando la solución obtenida, si se debe usar 600 libras del reactivo 2, ¿cuántas libras del reactivo 1 sería recomendable usar? ¿Cuál de estas soluciones minimiza además el costo incurrido en la reacción?

- Considere el problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rcll}
 (P) \text{ mín} & x_1 & -2x_2 & -4x_3 & +2x_4 & & \\
 & x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 4 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 8 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

- Usando Fase I del algoritmo Simplex, determine un punto extremo del poliedro factible de  $(P)$ .
  - A partir de la base obtenida, resuelva  $(P)$  usando Fase II del algoritmo Simplex.
- a) Resuelva, utilizando el método Simplex con dos fases, el problema:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{mín} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \\
 & x_1 + x_2 + 3x_3 & = 60 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \geq 120 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
 \end{array}$$

- Demuestre, usando el método Simplex, que el siguiente problema es no acotado y

determine una dirección extrema de no acotamiento.

$$\begin{aligned} \text{máx } & 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ & -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 \leq 20 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c) Reformule como problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } & 2x_2 + |x_1 - x_3| \\ & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \\ & x_3^2 \leq 1 \end{aligned}$$

4. Resuelva el problema siguiente, escribiéndolo como problema canónico de programación lineal y usando luego el método Simplex:

$$(P) \begin{aligned} \text{mín } & f(x_1, x_2) \\ & x_1 + |x_2| \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $f(x_1, x_2) = \text{máx}\{x_1 - 2, x_2\}$ .

5. (a) Considere el poliedro  $\mathcal{P}$  definido por:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Usando los teoremas de caracterización, encuentre todos los puntos extremos tales que  $x_1 = 0$  y pruebe que  $(1, 0, 3, 2)$  es dirección extrema de  $\mathcal{P}$ .

(b) Considere el siguiente problema lineal:

$$(P) \begin{aligned} \text{mín } & x_1 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Diga por qué este problema es acotado. Determine el conjunto solución y el valor óptimo de  $(P)$ .

6. Considere el problema de programación lineal

$$(P) \quad \min \quad -3x_1 - 7x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &\leq 10 + 2x_1 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 20 + x_3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Encuentre una solución básica factible con  $x_1$  y  $x_2$  en la base.
- Determine los costos reducidos asociados a esta base y diga si la solución en curso es óptima. Si no lo es, itere con el método Simplex hasta encontrar la solución de  $(P)$ .

7. Considere el siguiente cuadro del método Simplex, que proviene de la resolución de un problema de la forma

$$\text{mín } c^T x, \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} -\gamma & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 4 \\ \alpha & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \theta \end{array}$$

Indique rangos de los parámetros, de manera que:

- La solución en curso es óptima y es única (¿cuál es?).
- El problema es no acotado ¿Cuál es dirección extrema correspondiente a este no acotamiento?
- La solución en curso es óptima pero no es única (indique el conjunto solución).
- La solución en curso es factible, pero no es óptima (realice, a partir de ella, una iteración más).

Si el cuadro es óptimo y el vector de costos originales es  $c^T = (1, 1, 1, 1, -1)$

- Deduzca el valor (o rango) de  $\theta$ .
- Deduzca el valor (o rango) de  $\alpha$ .

8. Sea

$$(P) \quad \text{mín } c^T x$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre que al final de la Fase I del algoritmo Simplex, en el caso de encontrar una base factible inicial para  $(P)$ , los costos reducidos de las variables artificiales (no básicas) son todos iguales a 1.

9. Considere el problema fraccional:

$$(F) \quad \begin{aligned} \min \quad & \frac{x_1 + 1}{x_2 + 3} \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Demuestre que (F) es equivalente al problema lineal

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_3 \\ & y_1 + y_2 - y_3 \leq 0 \\ & y_2 + 3y_3 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Especifique claramente la relación entre las variables  $x_1, x_2$  y las variables  $y_1, y_2, y_3$ .

b) Resuelva el problema lineal (P) usando Simplex y deduzca una solución de (F).  
**Indicación:** si no quiere hacer Fase I, utilice las variables  $y_1$  e  $y_3$  como básicas iniciales.

10. Considere el siguiente problema:

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\ & \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

El método Simplex aplicado a (P) nos entrega el siguiente cuadro final:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 9 & 0 & 11 & \frac{1}{2} & 294 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 6 \end{array}$$

Suponiendo que los costos son perturbados de manera que  $c_1 = 6 + \theta$ ,  $c_2 = 14 + 2\theta$ ,  $c_3 = 13 + 2\theta$ , grafique el valor óptimo  $z(\theta)$  del problema (P), dentro del rango de  $\theta$  en el cual la base óptima actual no cambia.

11. Considere el problema:

$$(P_\alpha) \quad \min z(\alpha) = \alpha x_1 + x_3$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\
-x_1 + x_3 + x_5 &= 2 \\
x_1 - x_3 + x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

a) Resuélvalo usando Simplex, indicando el conjunto solución:

$$\Psi(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es solución de } (P_\alpha)\}$$

para cada  $\alpha \in [-1, 1]$ .

b) Grafique  $z(\alpha)$  y encuentre su valor óptimo  $\alpha^*$  donde  $\alpha^* \in [-1, 1]$ .

12. Resuelva, usando el algoritmo de Branch and Bound (Ramificación y Acotamiento), los siguientes problemas de programación lineal entera:

$$\begin{aligned}
(P_1) \quad \text{máx} \quad & 9x_1 + 5x_2 \\
& 4x_1 + 9x_2 \leq 35 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_1 - 3x_2 \geq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 19 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_2) \quad \text{mín} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 6 \\
& 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

**Nota:** No es esencial utilizar el algoritmo Simplex para resolver los subproblemas relajados. Puede usar resolución gráfica u otro método que estime conveniente.

## 9.4. Dualidad en programación lineal y aplicaciones

1. Sea  $(P)$  el problema

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & c^T x \\
& Ax = 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

y suponga que es acotado. Demuestre que  $\bar{x} = 0$  es solución de  $(P)$ .

2. a) Sean  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Considere el par primal/dual siguiente:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{máx}\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\} \\ (D) \quad & \text{mín}\{b^T y: A^T y \geq c, y \geq 0\} \end{aligned}$$

Sean  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$  primal y dual factibles, respectivamente. Demuestre que  $\bar{x}, \bar{y}$  son óptimos respectivos si y solamente si

$$\begin{aligned} (b - A\bar{x})^T \bar{y} &= 0 \\ (A^T \bar{y} - c)^T \bar{x} &= 0 \end{aligned}$$

b) Considere el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Usando la parte a), demuestre que  $\bar{x} = (0, 10, 20)^T$  es óptimo y determine una solución del problema dual.

3. Escriba el problema dual de

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín} \quad & -20x_1 \quad -16x_2 \quad -12x_3 \\ & x_1 \quad \quad \quad +x_4 \quad \quad \quad = 400 \\ & 2x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad \quad +x_5 \quad \quad = 1000 \\ & 2x_1 \quad +2x_2 \quad +x_3 \quad \quad \quad +x_6 \quad = 1600 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

y usando el Teorema de Holgura Complementaria, demuestre que

$$x^t = (0, 600, 400, 400, 0, 0)$$

es solución de (P). Encuentre también una solución del problema dual.

4. Considere el problema

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad \quad \quad = 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \quad \quad \quad + x_5 \quad \quad \quad = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \quad \quad \quad + x_6 \quad \quad \quad = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \quad \quad \quad \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Encuentre el dual del problema  $(P)$ .
- b) Verifique que el punto  $x^* = (1/3, 0, 13/3, 0, 6, 0)$  es factible para  $(P)$ .
- c) Demuestre usando el teorema de holgura complementaria que el punto  $x^*$  de la parte anterior es solución del problema  $(P)$ .
- d) Encuentre una solución para el problema dual, descrito en la parte a).

5. Deduzca un dual para

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 \geq -5 \\
 & |8x_1 - 7x_2 + 5x_3| \leq 13 \\
 & -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

6. Encuentre el dual de

$$\begin{aligned}
 (P) \quad \text{mín} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
 & x_1 + 12x_2 - x_3 \geq -5 \\
 & 8x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 13 \\
 & -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 \\
 & x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Su solución debe ser un problema  $(D)$  en el cual los costos son los recursos de  $(P)$  y viceversa, y la matriz de coeficientes debe ser la transpuesta de aquella de  $(P)$ . Justifique adecuadamente sus pasos.

7. Sea

$$(P) \quad \text{mín} \psi(x), \quad x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

donde  $\psi(x) = \text{máx}\{c_1^T x + d_1, \dots, c_k^T x + d_k\}$  y  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ .

Proponga un problema dual para  $(P)$ .

**Indicación:** considere que este problema es equivalente a un problema lineal.

8. Considere el siguiente problema de programación lineal:



$$\begin{array}{ll}
(P) \text{ mín} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\
& \vdots \\
& x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n \\
& x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.
\end{array}$$

- Determine el problema dual ( $D$ ).
- Verifique que se tiene la propiedad de dualidad fuerte, es decir,  $\text{val}(P) = \text{val}(D)$ .
- Muestre que para todo  $y$  vector factible de ( $D$ ), se tiene:

$$y_k + y_{k+1} + \dots + y_n < k, \quad \forall k \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

- Siendo  $\bar{x}$  el óptimo de ( $P$ ), deduzca del teorema de complementaridad, los valores  $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ .
- Resuelva el problema primal ( $P$ ), es decir, encuentre  $\bar{x}$ .
- Encuentre una solución óptima del dual. ¿Es solución única?

9. Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll}
(P) \text{ mín} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

- Escriba el problema dual asociado.
- Resuelva el problema primal, usando el algoritmo Simplex-dual, a partir de la base dada por las variables de holgura de ( $P$ ).

10. Sea

$$\begin{array}{ll}
(P) \text{ mín} & x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\
& x_1 + x_3 \leq 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

- Transforme ( $P$ ) en un problema canónico y aplique Fase I para encontrar una base inicial factible.

- b) Pase a la Fase II y encuentre la solución óptima de  $(P)$ .
- c) Transforme  $(P)$  de modo de aplicar el algoritmo Simplex-dual y resuélvalo usando dicho algoritmo.
- d) Es única la solución de  $(P)$ ? Justifique mediante el cuadro final del Simplex en las partes anteriores.
- e) Usando el teorema de holgura complementaria, encuentre una solución del problema dual de  $(P)$ . Diga si es única y por qué.

11. Escriba el dual del problema lineal

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

donde  $c, l, u \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $A \in \mathcal{M}_{mn}$ , son dados. Indique bajo qué condiciones este dual posee una solución factible.

12. Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ & 7x_1 + 4x_2 \leq 84 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resuelva utilizando Simplex y demuestre que la tabla final es la siguiente:

$$\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 2/7 & 1/7 & 0 & 50/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 3/7 & 0 & 45/7 \\ 1 & 0 & -4/7 & 5/7 & 0 & 40/7 \\ 0 & 0 & 32/7 & -47/7 & 1 & 128/7 \end{array}$$

- b) Denomine  $\alpha$  y  $\beta$  a los coeficientes de la función objetivo. Encuentre la región a la cual estos coeficientes deben pertenecer para que la base óptima anterior no cambie.
- c) Suponga que la última restricción es una restricción de capacidad. Cuánto puede variar la capacidad sin afectar el óptimo del problema?
- d) ¿En qué cambia la resolución del problema original, si se agrega la restricción  $x_1 + x_2 \leq 10$ ? Encuentre la nueva solución, si ya no es la misma que antes.

13. Sea el problema:

$$\begin{array}{rcl} \text{mín} & -3x_1 - x_2 - 4x_3 & \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

El siguiente corresponde al cuadro final del simplex

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & \bar{c}_2 & 0 & \bar{c}_4 & \bar{c}_5 & -z \\ \hline 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/5 & 2/5 & \bar{b}_2 \end{array}$$

- a) Determine los valores  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_5$  y  $z$  el valor óptimo del problema y encuentre la solución del problema.
- b) Suponga que la primera restricción ha cambiado, ahora está dada por

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq b_1$$

Determine para qué valores de  $b_1$  la solución de la parte anterior sigue siendo descrita por la misma base.

14. Un parque de diversiones requiere dividir su nuevo terreno de 50 hectáreas en tres categorías: *Tiendas*, *Comida* y *Entretenciones*. Cada hectárea usada para Entretenciones genera un beneficio de 150 US\$/hora; cada hectárea de Comida, 200 US\$/hora y una de Tiendas, 300 US\$/hora. Además, existe una serie de restricciones sobre como se debe dividir el terreno:

- Sólo 20 hectáreas son utilizables por las tiendas.
- Regulaciones sobre el terreno exigen por lo menos 1000 árboles en el parque, divididas en grupos de 20 árboles. Una hectárea de Comida genera 2 grupos de 20 árboles; una de Entretenciones, 1 grupo de 20 árboles y una de Tiendas no contiene árboles.
- No más de 180 personas pueden trabajar en el parque. Se necesitan 3 personas por hectárea de Entretención; 6 por hectárea de Comida y 3 por hectárea de Tiendas.

Dada esta información, se le pide:

- a) Plantear el problema descrito como uno de programación lineal, con el fin de maximizar el beneficio del parque.

- b) Resolver vía Simplex Fases I y II. Debería llegar (salvo reordenamiento) al siguiente tableau óptimo:

0	0	0	100	0	150	200	9500
1	0	0	2	0	-1	-2	30
0	0	0	0	1	-1	-1	10
0	1	0	-1	0	0	1	10
0	0	1	0	0	1	1	10

Note que la restricción sobre los trabajadores se puede factorizar.

- c) Suponga ahora que el ítem Comida sólo genera un beneficio de 180 US\$/hora. ¿Cuál es la nueva solución del problema? Entregue el valor óptimo y una división óptima del terreno.
- d) Suponga que el concejo de la comuna estudia aumentar la cantidad de árboles necesaria, a 1020. ¿Cuánto le costará al parque esta modificación, y qué será modificado? ¿y si aumenta a 1200? ¿y si ahora disminuye a 600?

15. Considere el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad \text{mín} \quad z &= 2x_1 + x_2 \\
 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\
 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Escriba el problema dual ( $D$ ) asociado a ( $P$ ).
- b) Resuelva el problema ( $P$ ), usando el método Simplex-dual. Para esto, escriba el problema ( $P$ ) en forma canónica y utilice como base dual-factible  $[x_3, x_4, x_5]$ .
- c) Si cambia  $z$  a  $z' = \alpha x_1 + x_2$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  la base óptima no cambia?

16. Considere siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\
 & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\
 & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Haciendo que  $x_4, x_5$  sean las variables de holgura, la tabla óptima del Simplex queda:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 100 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 20 \\ 16 & 0 & -2 & -4 & 1 & 10 \end{array}$$

Analice en los siguientes cambios (siempre con respecto al problema original), si la solución dada anteriormente sigue siendo óptima.

a) Cambie los coeficientes de  $x_1$  a:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) Introduzca una nueva variable  $x_6$  con coeficientes:

$$\begin{bmatrix} c_6 \\ a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

c) Introduzca una nueva restricción dada por  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$

d) Cambie la segunda restricción por  $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$

17. Considere un problema de maximización con todas las restricciones del tipo “ $\leq$ ” tal que la tabla óptima del Simplex es:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \bar{z} \\ \hline 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1/8 & 3/8 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}$$

donde  $x_3, x_4, x_5$  son variables de holgura. Supongamos que se ha decidido incrementar el lado derecho de una de las restricciones. ¿Cuál recomendaría Ud. para ello y por qué? ¿Cuál es el mayor incremento posible en ese caso? Encuentre el correspondiente nuevo valor óptimo de la función objetivo.

18. Considere el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} (P) \text{ mín} & 5x_1 - 3x_2 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Escriba el dual de **este** problema, es decir, **no** ocupe transformaciones equivalentes del problema para llevarlo a otra forma.

b) Dado el cuadro óptimo:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 10/3 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2 \\
 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1
 \end{array}$$

Escriba  $B$ , matriz de base óptima y  $B^{-1}$ .

c) ¿Cuál es la solución del problema dual? Justifique su respuesta.

d) Si se cambia la función objetivo a  $z' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3$ , ¿cuál es el conjunto de soluciones óptimas?

e) Si  $b$  cambia a  $b' = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  (en el problema original), ¿cuál es el conjunto de soluciones óptimas?

f) Si se introduce (al problema original) una nueva actividad  $u$ , cuyo costo unitario es 4 y columna correspondiente es  $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ¿cuál es la nueva solución óptima?

g) Si se agrega (al problema original) la restricción  $-x_1 - x_2 - x_3 \leq -5$ , ¿cuál es la nueva solución óptima?

19. Considere

$$\begin{array}{rcl}
 (P) \text{ mín} & 9x_2 & +x_3 & & -2x_5 & -x_6 & & \\
 & 5x_2 & +50x_3 & +x_4 & +x_5 & & = & 10 \\
 x_1 & -15x_2 & +2x_3 & & & & = & 2 \\
 & x_2 & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & = & 6 \\
 & & & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6
 \end{array}$$

a) Resuelva  $(P)$ .

b) Resuelva  $(P)$ , pero suponiendo que el coeficiente de  $x_5$  en la función objetivo es  $c_5 = 1$  (en lugar de -2).

c) Suponga que al problema  $(P)$  se le modifica el recurso  $b_1$  de manera que  $b_1 = 10\alpha$ . ¿Para que valores de  $\alpha$  la base óptima no cambia?

d) ¿Qué sucede si al problema  $(P)$  se le agrega la variable  $x_7$ , con costo  $c_7 = 1$  y vector columna  $(0, -1, 0)^T$ ?

- e) ¿Que sucede si a  $(P)$  se le agrega la restricción  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq \beta$ ?  
 Analice en función de  $\beta$ .

20. Considere el problema de programación lineal:

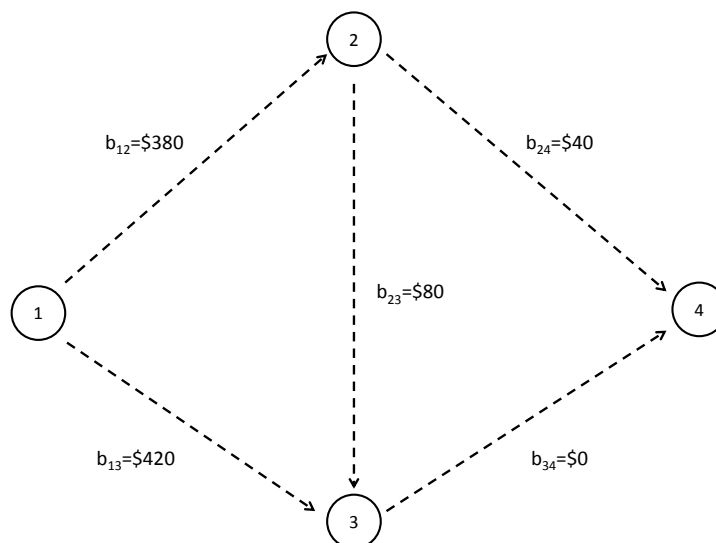
$$\begin{array}{rcll}
 (P) \text{ mín} & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +2x_4 \\
 & x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 4 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 8 \\
 & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1, \dots, 4
 \end{array}$$

- a) Imponiendo simultáneamente que la variable  $x_1$  pertenece a la base y la variable  $x_3$  está fuera de ella, encuentre una solución básica factible del problema.
- b) A partir de la base obtenida en a), resuelva  $(P)$  usando la Fase II del algoritmo Simplex.
- c) Determine la solución óptima del problema dual de  $(P)$ .
- d) Si se agrega la restricción:  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$  al problema  $(P)$ , determine la nueva solución óptima o justifique por qué no existe.
- e) Determine la región de los recursos (coeficientes del lado derecho del sistema) para la cual la base encontrada en (b) es óptima para  $(P)$ .
- f) Determine el rango de variación del costo de  $x_1$  de manera que la base óptima encontrada en (b) no cambie.
21. Usted es empresario de buses urbanos y debe transportar pasajeros en el rango horario 9:00 a 10:00 AM, según el siguiente esquema:

Los beneficios unitarios  $b_{ij}$  dependen del tramo y están indicados en los arcos.

Suponga que:

- Desde el nodo 1 hacia los nodos 2 y 3, no puede transportar más de 1000 pasajeros en total.
- No puede llevar más de 800 pasajeros en total hasta el nodo 4 (desde los nodos 2 y 3).
- No puede transportar más de 500 pasajeros en ningún tramo.
- Todos los pasajeros que toman un bus en el nodo 1, transbordan en los nodos 2 y/o 3, pagando el valor que corresponde al nuevo tramo, y llegan al nodo 4.
- Pueden subir pasajeros en nodos 2 y 3.



- a) Escriba un modelo de optimización lineal que represente esta situación, en el supuesto que usted desea maximizar su beneficio.
- b) Le informamos que la solución de su problema es:

$$x_{12} = 500, x_{13} = 300, x_{23} = 200, x_{24} = 300, x_{34} = 500$$

(se denomina  $x_{ij}$  al número de pasajeros transportados desde el nodo  $i$  al nodo  $j$ ) y que las variables duales de las cotas superiores del número de pasajeros en los tramos son:

$$y_{12} = 40, y_{13} = 0, y_{23} = 0, y_{24} = 0, y_{34} = 40$$

Si le ofrecen un bus para incrementar en 100 los pasajeros transportados e insertarlo en un tramo a elección, al precio de \$2.500 en ese rango horario. Lo compraría?. En caso afirmativo, en qué tramo lo insertaría y por qué? Cuantifique el beneficio adicional que lograría.

- c) Volviendo a la situación original, ¿cuál es el precio máximo que usted pagaría por comprar un bus adicional con capacidad para 150 personas? Fundamente.

## 9.5. Modelos para flujos en redes

1. Dado un grafo  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , formule un problema de programación lineal entero que resuelva:



a) Encuentre  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{N}$  de cardinal mínimo tal que:

$$\forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad i \in \mathcal{P} \vee j \in \mathcal{P}$$

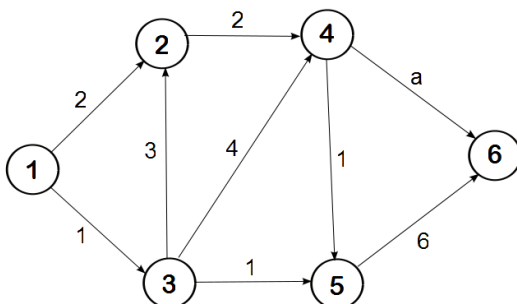
b) Encuentre  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$  de cardinal mínimo tal que:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad \exists j \in \mathcal{N}, \quad (i, j) \in \mathcal{E} \vee (j, i) \in \mathcal{E}$$

2. Carabineros de Chile desea vigilar ciertas calles en el entorno de un estadio de fútbol y decide destinar carabineros para que supervisen las calles aledañas. Sea  $N$  el conjunto de los puntos claves (son esquinas). Sea  $A \subseteq N \times N$  el conjunto de tramos de calles que unen dos puntos de  $N$ . Suponga que un carabinero parado en el punto  $i \in N$  puede vigilar todas las calles que converjan a ese punto  $i$ . Sea  $P$  el conjunto de los carabineros con  $|P| > |N|$ . Suponga que el costo de mandar el carabinero  $p$  al punto  $n$  es  $c_{pn}$ . Además, para evitar distracciones sólo puede haber un carabinero por punto clave.

Formule un problema de programación lineal (posiblemente entera) tal que todas las calles estén bajo supervisión policial, minimizando el costo.

3. Considere el grafo dado por la siguiente figura, donde  $a \in \mathbb{R}_+$  :



- (i) Para  $a = 12$  resuelva el problema de rutas mínimas (usando el algoritmo de Dijkstra).
- (ii) Determine para qué valores de  $a$  la ruta mínima contiene al arco  $(4, 6)$ .
4. La empresa de energía  $A\&L$  dispone de cuatro plantas de generación para satisfacer la demanda diaria eléctrica en cuatro ciudades Santiago, Rancagua, Valparaiso y Los Andes. Las plantas 1,2,3 y 4 pueden satisfacer 80, 30, 60 y 45 millones de KW al día

respectivamente. Las necesidades de las ciudades de Santiago, Rancagua, Valparaiso y Los Andes son de 70, 40, 65 y 35 millones de KW al día respectivamente.

Los costos asociados al envío de suministro energético por cada millón de KW entre cada planta y cada ciudad son los registrados en la siguiente tabla.

Plantas/Ciudades	Santiago	Rancagua	Valparaiso	Los Andes
(1)	5	2	7	3
(2)	3	6	6	1
(3)	6	1	2	4
(4)	4	3	6	6

- a) Modele el problema anterior como un problema de programación lineal.
  - b) Utilizando el método de saturación, encuentre una solución factible.
  - c) Verifique si la solución de la parte anterior es óptima.
5. Considere tres centros productivos O1, O2 y O3, con ofertas respectivas de 5, 25 y 25. Hay además dos centros D1 y D2, con demandas 15 y 30. Suponga que la matriz de costos unitarios de transporte es

	D1	D2
O1	9	12
O2	1	1
O3	2	2

- a) Plantear este problema como uno de transporte.
  - b) Encuentre una solución básica factible que contenga a los arcos (1, 1) y (1, 2).
  - c) Indique el valor de la función objetivo en esta solución e indique una cota inferior del valor óptimo.
  - d) Itere hasta encontrar una solución óptima y diga si es única (justifique).
  - e) Si se modifica el costo del arco (1,1) al valor 2, recalcule la (nueva) solución óptima.
6. En un cierto país se han construido 3 nuevas plantas de electricidad (numeradas del 1 al 3) capaces de ofertar  $\alpha_1 = 7$ ,  $\alpha_2 = 8$ ,  $\alpha_3 = 5$  para satisfacer la demanda  $\beta_A = 12$  y  $\beta_B = 13$  de las ciudades A y B respectivamente. Los costos de transporte de electricidad desde las plantas a las ciudades vienen dados por:  $c_{1A} = 5$ ,  $c_{1B} = 3$ ,  $c_{2A} = 5$ ,  $c_{2B} = 6$ ,  $c_{3A} = 2$ ,  $c_{3B} = 2$ .

- a) Formule el problema como un problema de transporte. Inicialice la resolución del problema usando un método conveniente.
- b) Encuentre una solución óptima. Es solución única (justifique su respuesta)? Si no lo es, encuentre otra solución óptima.
7. Se desean embarcar 40 mil toneladas de cobre desde los puertos de Antofagasta y San Antonio (20 mil toneladas desde cada puerto), con destino a las ciudades de Hong Kong, New York y Tokio. Estas ciudades demandan 15 mil, 15 mil y 10 mil toneladas del mineral, respectivamente. Supongamos que las rutas entre los puertos y las ciudades destino son fijas y conocidas, y que los costos asociados a transportar mil toneladas (medidos en millones de pesos) son estimados en la siguiente tabla:

Origen\Destino	Hong Kong	New York	Tokyo
Antofagasta	10	11	20
San Antonio	6	9	8

- (a) Encuentre una solución inicial básica factible.
- (b) Determine si la solución en curso es óptima. Si no lo es, itere hasta encontrar solución óptima.
- (c) Es solución única? Explique.
8. Resolver el problema de transporte, usando los datos:

$$(\text{ofertas}) a = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} \quad (\text{demandas}) b = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \quad (\text{costos unitarios}) C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 11 \\ 12 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notar que la oferta excede a la demanda. Suponga que lo sobrante se manda a un botadero, a costo unitario 10 para el oferente 1, 15 para el oferente 2 y 8 para el oferente 3.

¿Qué ocurre (cómo cambia la solución) si el costo de enviar a botadero fuese nulo para los tres oferentes?

9. Considere el grafo  $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (2, 4), (3, 4)\})$  con capacidades y costos dados por la siguiente tabla:

	Costo	Capacidad inferior	Capacidad superior
(1,2)	2	0	10
(1,3)	3	1	8
(3,2)	12	0	5
(2,4)	4	2	12
(3,4)	2	1	5

Considere las demandas  $d_1 = 12, d_2 = 0, d_3 = 0, d_4 = -12$  y la solución para el problema de flujo a costo mínimo siguiente:  $x_{12} = 10, x_{13} = 2, x_{32} = 0, x_{24} = 10, x_{34} = 2$ . Determine si la solución es óptima o no.

10. Considere un problema de flujo de costo mínimo en una red de 5 nodos y 9 arcos. Los nodos se enumeran de 1 a 5 y los costos unitarios son:

$$c_{12} = 4, c_{13} = 4, c_{23} = 2, c_{24} = 2, c_{25} = 6, c_{34} = 1, c_{35} = 3, c_{45} = 2, c_{53} = 1.$$

Las capacidades máximas de los arcos son:

$$u_{12} = 15, u_{13} = 8, u_{23} = \infty, u_{24} = 4, u_{25} = 10, u_{34} = 15, u_{35} = 5, u_{45} = \infty, u_{53} = 4.$$

El nodo 1 tiene oferta 20 y los nodos 4 y 5 tienen demanda 10 cada uno; los demás son de trasbordo.

- Dibuje el grafo correspondiente, indicando los datos en los arcos.
- Dibuje una solución básica factible, indicando sobre los arcos los valores de los flujos. Indique con líneas punteadas los arcos no básicos con flujos no nulos.
- Diga si es solución óptima (justifique).
- Itere una vez, si es necesario. Diga si la nueva solución es óptima y, de ser así, si es única.

## 9.6. Caracterización de optimalidad

1. Considere

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  un mínimo local de (P) e  $I = \{ i / g_i(\bar{x}) = 0 \}$ . Suponga que  $f, g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \forall i = 1, \dots, m$ .

Pruebe que  $F_0 \cap G = \emptyset$ , donde

$$\begin{aligned} F_0 &= \{d : \nabla f(\bar{x})^t d < 0\} \\ G &= \{d : \nabla g_i(\bar{x})^t d \leq 0, \quad i \in I\} \end{aligned}$$

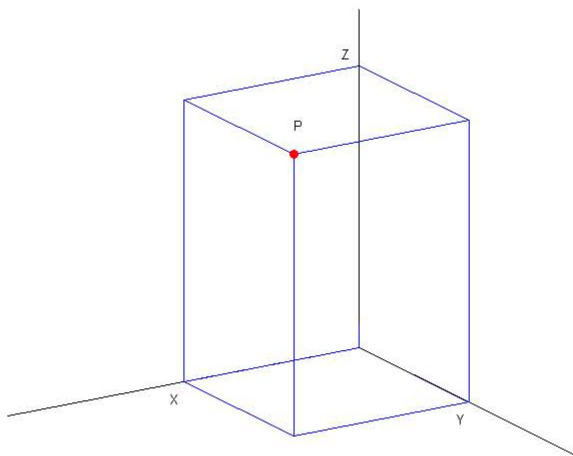
2. Un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice **cono** si:

$$\forall x \in C, \forall \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \in C$$

Sean  $S \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in S$ . Definimos el cono tangente de  $S$  en  $x_0$ :

$$T_S(x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \exists d_k \rightarrow d, \exists t_k \rightarrow 0, t_k \geq 0, x_0 + t_k d_k \in S \quad \forall k\}$$

- a) Muestre que  $T_S(x_0)$  es no vacío.
  - b) Muestre que  $T_S(x_0)$  es un cono.
  - c) Muestre que  $T_S(x_0)$  es un conjunto cerrado.
  - d) Si  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \vee y = 0\}$  y  $x_0 = (0, 0)$ , determine  $T_S(x_0)$ .
3. Considere una caja rectangular situada en el primer octante, con uno de sus vértices en el origen, las tres caras adyacentes a los planos formados por los ejes coordenados y el vértice opuesto  $P = (x, y, z)$  restringido a la superficie del paraboloide de ecuación  $x^2 + y^2 + z = 1$ . Determine las coordenadas de  $w$  para que la caja sea de volumen máximo. Para ello:



- Eliminando  $z$  pruebe que el problema se puede escribir como maximización de la función

$$f(x, y) = xy - x^3y - xy^3$$

y determine los puntos críticos de  $f$  que caen en el primer cuadrante, es decir  $x > 0, y > 0$ . Además determine la naturaleza de dicho(s) punto(s) crítico(s) e indique el punto óptimo  $\bar{P}$ .

- En vez de eliminar  $z$ , uno también podría utilizar el teorema de KKT para maximizar el volumen  $V = xyz$  sujeto a la misma restricción para  $P$ . Resuelva y compare con su solución anterior.

4. Sea

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x - y - z^2 \\ & x + y + z \geq 10 \\ & -x + 2y + z^2 \geq 10 \end{aligned}$$

Escriba las ecuaciones de KKT para  $(P)$  y resuelva  $(P)$  a partir de allí.

5. Resuelva (de cualquier manera) el problema siguiente y verifique las condiciones de KKT para su solución.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x^2 + y^2 \\ & x + y = 5 \\ & xy \geq 4 \\ & (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

6. (a) Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere el siguiente problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

Muestre que los multiplicadores de KKT deben satisfacer:

$$\begin{aligned} u^T AA^T u &= u^T (Ax_0 - b) \\ u &\geq 0 \\ u &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

(b) Usando lo anterior, resuelva

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ & x + y + z \leq -3 \end{aligned}$$

7. Sean  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  funciones derivables. Considere el siguiente problema de minimización:

$$(P) \quad \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

- a) Argumente la existencia de solución de  $(P)$ .  
 b) Si  $\bar{x}$  es mínimo local de  $(P)$  muestre que existe  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  tal que:

$$f'_i(\bar{x}_i) + \bar{\lambda} = 0 \quad \forall i \text{ tal que } \bar{x}_i > 0$$

$$f'_i(\bar{x}_i) + \bar{\lambda} \geq 0 \quad \forall i \text{ tal que } \bar{x}_i = 0$$

8. Considere el problema de optimización (llamado problema fraccional)

$$(P) \quad \text{mín} \quad \frac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta}$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

donde  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{mn}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Suponga también que el conjunto factible  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$  es no vacío y compacto, y que  $q^T x + \beta > 0$ ,  $\forall x \in S$ .

Sea

$$(P') \quad \text{mín} \quad p^T y + \alpha z$$

$$Ay - zb \leq 0$$

$$q^T y + \beta z = 1$$

$$y, z \geq 0$$

Demuestre que ambos problemas son equivalentes, en el sentido que se indica a continuación.

- a) Demuestre que si  $(y, z)$  es solución factible de  $(P')$  entonces  $z > 0$ .  
 b) Demuestre que si  $(\bar{y}, \bar{z})$  es solución óptima de  $(P')$  entonces  $\bar{x} = \bar{y}/\bar{z}$  es solución óptima de  $(P)$ .

Use lo anterior para deducir una solución óptima del problema siguiente:

$$(Q) \quad \text{mín} \quad \frac{-2x_1 + x_2 + 2}{x_1 + 3x_2 + 4}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

y demuestre que la solución encontrada satisface las condiciones de KKT de  $(Q)$ .

9. Sea el problema:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 \\
 & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \geq 0 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Grafique el conjunto factible y determine la solución óptima graficando las curvas de nivel de la función objetivo.
- Para el punto encontrado, ¿se cumplen las condiciones de KKT? Escribálas y explique.

10. Dados los reales  $a_1, \dots, a_n \neq 0, b \geq 0$ . Considere el siguiente problema de optimización:

$$(P) \quad \text{máx} \quad \sum_{i=1}^n x_i \\
 \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 \leq b$$

- Entregue una interpretación geométrica para el problema.
- Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema.
- Encuentre un punto que satisfaga las condiciones de KKT. ¿Es un óptimo? Si la respuesta es afirmativa, ¿es local o global?
- Dé una expresión para el valor óptimo de  $(P)$ .

11. Una empresa fabrica un producto (en cantidad que denominamos  $x$ ), que vende en el mercado a un precio de 1 por unidad. Para generar este producto y ser capaz de venderlo, la empresa necesita de un insumo en cantidad  $y$ , que compra en el mercado a un precio de 1 por unidad. La cantidad del insumo  $y$  que necesita para producir  $x$  viene dada por la regla de producción:

$$y = x^2$$

Por restricciones de disponibilidad del mercado suponga que la empresa se enfrenta a la restricción adicional:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$



La ganancia por venta  $G$  viene dada por la cantidad  $x$  que se vende en el mercado (asuma que todo lo que se produce se vende), mientras que el costo de producción  $C$  viene dado por la cantidad del insumo  $y$  que se requiere para producir  $x$ . De esta manera las utilidades son  $G - C$ .

- a) Formule el problema anterior como un problema de optimización.
- b) Encuentre la solución del problema usando KKT .

12. La función de Cobb-Douglas es muy utilizada en Economía para representar la relación entre los inputs y los outputs de una firma. Toma la forma  $Y = AL^\alpha K^\beta$ , donde  $Y$  representa los outputs,  $L$  el trabajo y  $K$  el capital. Esta formulación puede ser aplicada a la utilidad y toma la forma  $u(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ , donde los exponentes son positivos y suman 1.

Considere entonces el caso particular de maximización de la utilidad (para  $\alpha \in ]0, 1[$ , dado):

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \\ & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $p_1, p_2 > 0$  son los precios y  $w > 0$  el presupuesto.

- a) Escriba las condiciones de KKT y encuentre explícitamente una solución  $x$  de ellas, en función de  $p_1, p_2, w$  y  $\alpha$ .  
**Sugerencia:** aplicando logaritmo, transforme primero el problema en otro equivalente, diciendo por qué es equivalente.
- b) ¿Se puede decir que esta solución es óptima para el problema original? Justifique.
- c) Encuentre el multiplicador  $\lambda$ , asociado a la primera restricción, en función de  $p_1, p_2, w$  y  $\alpha$ . ¿Qué representa este valor  $\lambda$ ?

13. Use las condiciones de KKT para decidir si  $\bar{x} = (2/3, 4/3, 1)^T$  y  $\bar{x} = (4/5, 6/5, 0)^T$  son soluciones del problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_3 \leq 2 \end{aligned}$$

14. Resuelva utilizando las condiciones de KKT

$$\begin{aligned} \text{mín } & x^2 + y^2 \\ & x + y = 5 \\ & xy \geq 4 \\ & (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

15. Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y diferenciable,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz de  $m \times n$  de rango  $m$  (completo) y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

Sea  $\bar{x}$  factible y

$$(Q) \quad \begin{aligned} \text{mín}_\eta & \|\eta_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \eta_i A_i^t\|^2 \\ & \sum_{i \in I_0} \eta_i = 1 \\ & \eta_i \geq 0 \quad \forall i \in I_0 \end{aligned}$$

donde  $I = \{ i / A_i \bar{x} = b_i \}$ ,  $I_0 = I \cup \{0\}$ , siendo  $A_i$  la fila  $i$  de  $A$ .

a) Demuestre que  $(Q)$  es un **problema convexo** y que tiene solución finita.

b) Demuestre que si el **valor** óptimo de  $(Q)$  es cero, entonces  $\bar{x}$  es un punto de KKT para  $(P)$ . ¿La inversa es verdadera?

16. Use las condiciones de KKT para decidir si  $\bar{x} = (2/3, 4/3, 1)^T$  y  $\bar{x} = (4/5, 6/5, 0)^T$  son soluciones del problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & -2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_3 \leq 2 \end{aligned}$$

17. Considere la familia de problemas  $\{P_\kappa\}$  de programación cuadrática dados por:

$$(P_\kappa) \quad \begin{aligned} \text{mín } & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq \kappa \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Diremos que una instancia de esta familia de problemas, es considerar  $(P_\kappa)$  para un  $\kappa \in \mathbb{R}$  fijo.

- Dar una interpretación geométrica de una instancia de esta familia de problemas.
- Explique por qué una instancia particular siempre tiene una solución óptima.
- Usando las condiciones de KKT, verifique que  $(3/2, 5/2)$  resuelve la instancia dada por  $\kappa = 4$ .
- Encuentre los valores de  $\kappa$  para los cuales las soluciones de las correspondientes instancias, se encuentran en la frontera de la región factible. Encuentre también los óptimos de estas instancias y los multiplicadores de KKT asociados.
- Con las mismas condiciones de la parte anterior, compare el valor del multiplicador de KKT asociado a la restricción  $x_1 + x_2 \geq \kappa$  y la derivada de la función objetivo con respecto a  $\kappa$  en valor óptimo.
- ¿Cuál es la solución óptima para una instancia arbitraria de esta familia de problemas, de modo que sea alcanzada en un punto interior de la región factible?

18. Considere las funciones  $f_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , convexas y diferenciables. Definimos la función

$$f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

Considere además el problema

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Demuestre que todo mínimo local de  $(P)$  es un mínimo global.
- Demuestre que el problema  $(P)$  es equivalente al problema

$$(P') \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & t \\ & f_i(x) \leq t \quad i = 1, \dots, k \\ & x \geq 0 \end{array}$$

en el sentido que una solución de  $(P)$  permite deducir en forma trivial una solución de  $(P')$  y viceversa.

- Sean  $\bar{x}$  una solución de  $(P)$  e  $I = \{i = 1, \dots, k : f_i(\bar{x}) = f(\bar{x})\}$ . Demuestre que existen  $\mu_i \geq 0$ ,  $i \in I$  y  $v \in \mathbb{R}_+^n$  tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \mu_i \nabla f_i(\bar{x}) &= v \\ \sum_{i \in I} \mu_i &= 1 \\ \bar{x}^T v &= 0 \end{aligned}$$

19. Considere el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & \|x\| \leq \rho \end{aligned}$$

donde  $\rho > 0$  está dado y  $Q$  es simétrica. Demuestre que  $\bar{x}$  resuelve (P) si y sólo si existe  $\lambda \geq 0$  tal que

$$\begin{aligned} (Q + \lambda I)\bar{x} &= -c \\ \lambda(\rho - \|\bar{x}\|) &= 0 \\ Q + \lambda I &\text{ es semidefinida positiva} \end{aligned}$$

20. Considere

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  factible y defina  $I = \{i / g_i(\bar{x}) = 0\}$ . Suponga que  $f, g_i \in \mathcal{C}^1$  y  $g_i$  convexa  $\forall i = 1, \dots, m$ . Considere el problema auxiliar

$$(PL) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & \nabla f(\bar{x})^t d \\ & \nabla g_i(\bar{x})^t d \leq 0 \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Sea  $\bar{d}$  solución de (PL) y  $\bar{z} = \nabla f(\bar{x})^t \bar{d}$

- a) Demuestre que el problema (P) es convexo.
  - b) Demuestre que (PL) tiene solución y que  $\bar{z} \leq 0$ . ¿Qué significa la condición  $\bar{z} < 0$ ?
  - c) Demuestre que si  $\bar{z} = 0$  entonces  $\bar{x}$  satisface las condiciones de KKT para el problema (P). ¿La recíproca es verdadera?
21. (a) Encuentre las dimensiones de un paralelepípedo de volumen unitario y superficie mínima.
- (b) Sean  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  funciones derivables. Considere el siguiente problema de minimización:

$$(P) \quad \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i) / \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

- (i) Argumente la existencia de solución de (P).

(ii) Si  $\bar{x}$  es mínimo local de  $(P)$  muestre que existe  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  tal que:

$$f'_i(\bar{x}_i) + \bar{\lambda} = 0 \quad \forall i \text{ tal que } \bar{x}_i > 0$$

$$f'_i(\bar{x}_i) + \bar{\lambda} \geq 0 \quad \forall i \text{ tal que } \bar{x}_i = 0$$

22. Usando las condiciones KKT, resuelva el siguiente problema no lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } & e^{-x_1} + e^{-2x_2} \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 9.7. Algoritmos para optimización no lineal

1. Considere el siguiente problema:

$$\text{mín } x^4 - 8x^3 + 25x^2 + 4y^2 - 4xy - 32x + 16$$

Encuentre una aproximación del óptimo ocupando 2 iteraciones del método de Newton partiendo de  $(x_0, y_0) = (0, 3)$ . Realice además 2 iteraciones del método del gradiente.

2. a) Considere el siguiente problema de optimización:

$$(P) \quad \text{mín } f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 1)^4$$

Haga dos iteraciones con el método de Newton para  $(P)$ . Tome como punto de partida  $(1, 0)$  y el paso  $t_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ .

b) Repetir la parte a), pero hacer una sola iteración, usando el paso

$$\alpha_k = \arg \text{mín } f(x_k + td_k),$$

donde  $x_k$  es el punto inicial y  $d_k$  es la dirección de Newton.

3. Considere el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & -2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_3 \leq 2 \end{aligned}$$

Haga dos iteraciones del método de direcciones admisibles, a partir del punto inicial  $x^0 = (0, 0, 0)^T$ . Chequee optimalidad en cada etapa.

4. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & (x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - 2)^2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Haga una iteración del método del gradiente proyectado, a partir del punto  $x^T = (1, 1, 1)$ .

5. Considere el problema:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ & x_1 + x_2 = 3 \end{aligned}$$

Hacer dos iteraciones del método de penalización, usando penalización cuadrática, con  $\mu = 0,1$ ,  $\mu = 1$  y  $x^0 = (0, 0)$ .

6. Considere el problema:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 10x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Realice dos iteraciones del método de direcciones admisibles, a partir  $x^0 = (0, 0)$ . Chequee, en cada iteración, si está o no en presencia de una solución estacionaria. Si alcanza un punto estacionario, se puede afirmar que es un mínimo?

Debe explicitar claramente los subproblemas que resuelva, tanto para la elección de la dirección como para el paso. Si le conviene, puede usar procedimientos gráficos para la resolución de los subproblemas.

7. Considere el siguiente problema de optimización

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 3 \\ & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & x + y \leq 1 \end{aligned}$$

a) Demuestre que el problema (P) tiene solución.

- b) Grafique las curvas de nivel de la función objetivo y el conjunto factible.
- c) Determine si  $\mathcal{D}(\vec{x}) \cap \mathcal{G}(\vec{x}) = \emptyset$ , es decir, si la intersección del conjunto de direcciones de descenso con el conjunto de direcciones admisibles es vacía, para  $\vec{x}_1 = (1; 0)$  y  $\vec{x}_2 = (0,6; 0,4)$ . En base a los resultados obtenidos, clasifique los dos puntos anteriores.

**Ind.:** Recuerde  $\mathcal{D}(\vec{x}) = \{\vec{d} / \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{d} < 0\}$  y  $\mathcal{G}(\vec{x}) = \{\vec{d} / \nabla g_i(\vec{x}) \cdot \vec{d} < 0, \forall i \in I\}$ , donde  $I$  es el conjunto de índices de restricciones activas en el punto  $\vec{x}$ .

# Bibliografía

- [1] Aragón, F.J., M.A. Goberna, M.A. López, M.M.L. Rodríguez. Nonlinear optimization. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. *Springer*, 2019. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-11184-7>.
- [2] Bazaraa, M.S., J.J. Jarvis, H.D. Sherali. Linear programming and network flows. *Wiley and Sons*, 2010.
- [3] Bazaraa, M.S., H.D. Sherali, C.M. Shetty. Nonlinear programming: theory and algorithms. *Wiley and Sons*, 2006.
- [4] Bertsimas, D., J.N. Tsitsiklis. Introduction to linear programming. *Athenea Scientific*, 1997.
- [5] Boyd, S. P., L. Vanderberghe. Convex optimization. *Cambridge University Press*, 2004.
- [6] Cornuejols, G., R. Tütüncü. Optimization methods in finance. *Cambridge University Press*, 2013.
- [7] Chvátal, V. Linear programming. *W.H. Freeman and Company*, 1983.
- [8] Goberna, M.A., V. Jornet, R. Puente. Optimización lineal: teoría, métodos y modelos. *Mc Graw Hill* 2004.
- [9] Luenberger, D., Y.Y. Ye, Linear and nonlinear programming (4th edition). *Springer*, 2016.
- [10] Nocedal, J., S. Wright. Numerical optimization (2nd edition). *Springer*, 2006.
- [11] Peressini, A.L., F.E. Sullivan, J.J. Uhl. The mathematics of nonlinear programming. *Springer Verlag (Undergraduate Texts in Mathematics)*, 1988.
- [12] Schrijver, A. Combinatorial optimization. *Springer*, 2003
- [13] Williams, H.P. Model building in mathematical programming. *Wiley and Sons*, 2013.